

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

# حل تمرین ریاضی (۱)

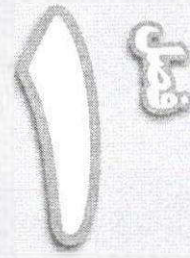
رشته‌های ریاضی و فیزیک — علوم تجربی

پایه دهم

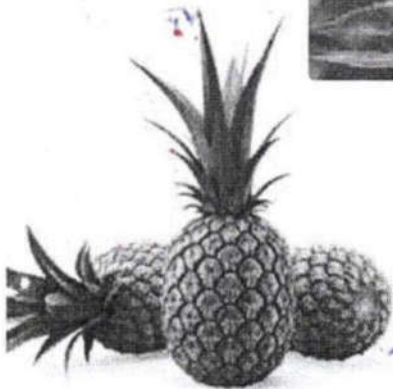
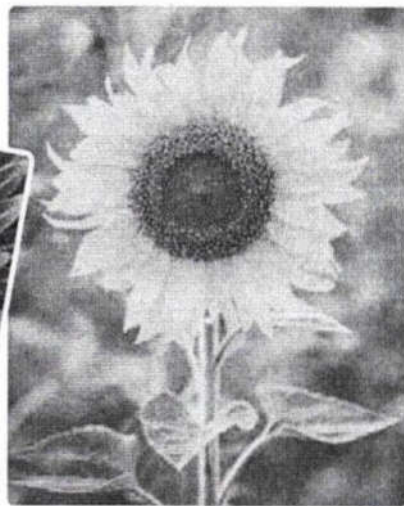
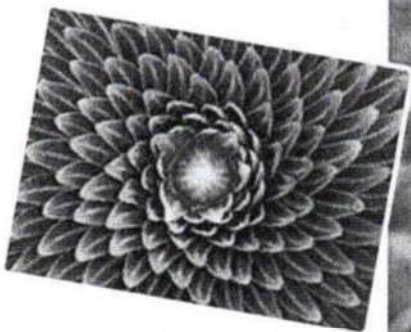
متوسطه دوم

وبسایت مدرسه سوم

# مجموعه، الگو و دنباله



آلا داغلار یا کوه‌های رنگی در استان زنجان



تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

درس اول

متعمیق مجموعه

درس دوم

الگو و دنباله

درس سوم

دنباله‌های حسابی و هندسی

درس چهارم

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

درس اول: مجموعه های منتهی و نامتناهی

مجموعه های اعداد

انسان در طول تاریخ برحسب نیاز خود از مجموعه های مختلف اعداد استفاده کرده است. برخی از این مجموعه ها که در سال های قبل با آنها آشنا شدیم، به شرح زیرند:

مجموعه اعداد طبیعی:  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

مجموعه اعداد حسابی:  $\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

مجموعه اعداد صحیح:  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

مجموعه اعداد گویا:  $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} | m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$

مجموعه اعداد گنگ:  $\mathbb{Q}' =$  مجموعه اعداد گنگ نسبت دو عدد صحیح نمایش داد.

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$  : مجموعه اعداد حقیقی



جورج کانتور

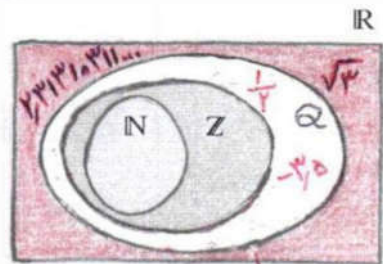
«مجموعه» یکی از اساسی ترین مفاهیم ریاضی است که بسیاری از نظریه های دیگر ریاضی در یک قرن اخیر بر مبنای آن پایه گذاری یا سازماندهی شده اند. مطالعات جدی درباره مجموعه ها با کار جورج کانتور در سال ۱۸۷۰ آغاز می شود.

همان طور که ملاحظه می شود رابطه زیر مجموعه بودن بین این مجموعه ها به شکل  $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$  برقرار است. به عبارت دیگر تمام مجموعه های اعدادی که تاکنون با آنها آشنا شده ایم، زیر مجموعه هایی از اعداد حقیقی اند. در نتیجه هر عدد دلخواهی را که در نظر بگیریم، باید جایی روی محور اعداد حقیقی داشته باشد و همچنین هر نقطه روی این محور نشان دهنده یک عدد حقیقی مشخص است.

مجموعه های اعداد گنگ

کاردر کلاس

الف) مجموعه  $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$  چه نام دارد؟ آن را روی شکل مقابل هاشور بزنید و دو عضو دلخواه از آن را در ناحیه هاشور خورده بنویسید.  $\sqrt{3}, \sqrt{2}, \sqrt{5}, \dots$   
 ب) دو عدد گویا مثل بزنید که عدد صحیح نباشند و آنها را روی شکل مقابل در محل مناسب بنویسید.  $\frac{1}{2}$  و  $-\frac{3}{5}$   
 ب) اعداد زیر را روی شکل و در محل مناسب بنویسید.



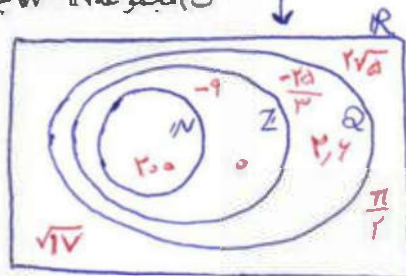
$\mathbb{R} - \mathbb{Q} = \mathbb{Q}'$   
مجموعه های اعداد گنگ

$\sqrt{17}, 0, 200, \frac{\pi}{2}, \frac{2}{6}, 2\sqrt{5}, -\frac{25}{3}, -9$

ت) مجموعه اعداد صحیح غیر حسابی را با نمایش اعضا بنویسید.  $\mathbb{Z} - \mathbb{W} = \{-1, -2, -3, \dots\}$

$\mathbb{W} - \mathbb{N} = \{0\}$

ث) مجموعه  $\mathbb{W} - \mathbb{N}$  چند عضو دارد؟ یک عضو

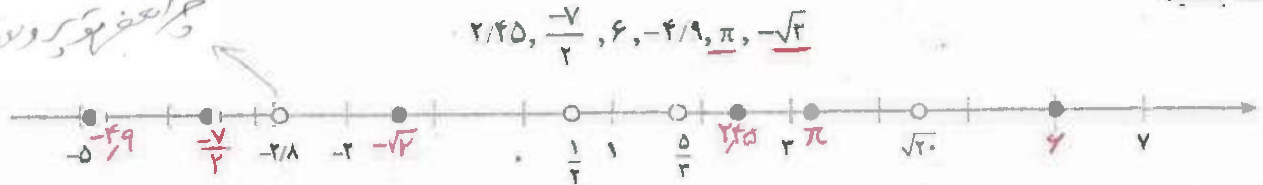


## تهیه کننده:

### گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

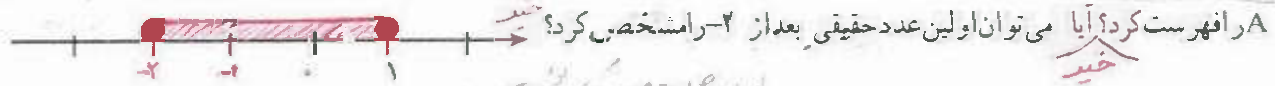
۲ هر یک از اعداد داده شده را در یکی از جاهای مشخص شده روی محور بنویسید. کدام یک از این شش عدد گنگ اند؟ زیر آنها خط بکشید.

اعضای مجموعه حقیقی



#### بازه‌ها

در اینجا گونه دیگری از زیرمجموعه‌های  $\mathbb{R}$  را در نظر می‌گیریم. فرض کنید  $A$  مجموعه شامل تمام اعداد حقیقی بین  $-2$  و  $1$  به همراه خود این دو عدد باشد؛ یعنی  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 1\}$ . اعضای  $A$  را روی محور زیر، با رنگ کردن مشخص کنید. آیا می‌توان تمام اعضای  $A$  را فهرست کرد؟ آیا می‌توان اولین عدد حقیقی بعد از  $-2$  را مشخص کرد؟



(زیرمجموعه‌هایی از  $\mathbb{R}$  را که شامل تمام اعداد حقیقی بین دو عدد مشخص اند، «بازه» یا «فاصله» می‌نامیم.) بازدها در ریاضیات از اهمیت نسبتاً زیادی برخوردارند و ما هم در برخی از فصل‌های بعدی این کتاب به دفعات با آنها سرو کار خواهیم داشت. از این رو شایسته است که برای نشان دادن آنها از نماد ساده‌تری استفاده شود. بنابراین  $A$  را با نماد  $[-2, 1]$  نشان می‌دهیم و آن را بازه بسته از  $-2$  تا  $1$  می‌نامیم. حل اگر نقاط ابتدایی و انتهایی این بازه یعنی  $-2$  و  $1$  را از  $A$  حذف کنیم، آنگاه مجموعه‌ای مانند  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 1\}$  به دست می‌آید که آن را بازه باز بین  $-2$  و  $1$  می‌نامیم و با نماد  $(-2, 1)$  نشان می‌دهیم. به‌طور خلاصه:

بازه بسته بین  $-2$  و  $1$  :  $A = [-2, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 1\}$



بازه باز بین  $-2$  و  $1$  :  $B = (-2, 1) = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 1\}$



بازدهای نیم باز هم به روش مشابه تعریف می‌شوند.

#### تعالیت

$$a, b \in \mathbb{R}$$

اگر  $a$  و  $b$  دو عدد حقیقی دلخواه باشند، به طوری که  $a < b$  آنگاه جدول زیر را کامل کنید:

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
باز	$(a, b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	
بسته	$[a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	
نیم باز	$[a, b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	
نیم باز	$(a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	
مثال	$(1, 5]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 5\}$	
مثال	$[-3, 2)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 2\}$	

## تهیه کننده:

### گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

گاهی تمام اعداد حقیقی مثلاً بزرگتر از ۲ مورد نظر است. به عنوان مثال، می‌دانیم که مجموعه جواب نامعادله  $2x > 4$  به صورت  $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$  است. اعضای  $C$  را روی محور زیر نشان دهید.



آیا می‌توانید  $C$  را به صورت یک بازه بنویسید؟ برای اینکه این مجموعه را به شکل بازه بنویسیم، از نماد  $+\infty$  (بخوانید: مثبت بی‌نهایت) استفاده می‌کنیم. مجموعه  $C$  را در قالب بازه با نماد  $(2, +\infty)$  نمایش می‌دهیم که یک بازه باز محسوب می‌شود. به همین ترتیب برای مجموعه‌ای مثل  $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$  نمایش بازه‌ای به صورت  $]-\infty, 1]$  خواهد بود که یک بازه نیم‌باز است. توجه داریم که  $+\infty$  و  $-\infty$  اعداد حقیقی نیستند. در سال‌های آینده با این دو نماد بیشتر آشنا خواهیم شد.

**فعالیت**

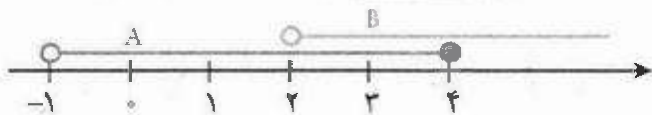
اگر  $a \in \mathbb{R}$  عدد حقیقی دلخواهی باشد، جدول زیر را کامل کنید.

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
باز	$(a, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	
نیم باز	$[a, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	
نیم باز	$(-\infty, a]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$	
باز	$(-\infty, a)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$	
باز	$(-\infty, +\infty)$	$\mathbb{R}$	
نیم باز	$[3, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$	
باز	$(-\infty, 5)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$	

مثال  
مثال

**مثال**

می‌خواهیم اجتماع و اشتراک دو بازه  $A = (-1, 4]$  و  $B = (2, +\infty)$  را به دست آوریم. نمایش هندسی هر دو بازه را مطابق شکل روی یک محور رسم می‌کنیم.



از روی شکل دیده می‌شود که  $A \cup B$  برابر است با مجموعه تمام اعداد حقیقی بزرگتر از  $-1$ ؛ یعنی:

$$(-1, 4] \cup (2, +\infty) = (-1, +\infty)$$

همچنین با توجه به شکل ملاحظه می‌شود که  $A \cap B$  برابر است با مجموعه تمام اعداد حقیقی بین ۲ و ۴ به همراه خود عدد ۴؛ یعنی:

$$(-1, 4] \cap (2, +\infty) = (2, 4]$$

توضیح دهید که چرا  $2 \notin A \cap B$ .

۴ چون ۲ در بازه  $B$  نیست، پس در اشتراک نیست.

## تهیه کننده:

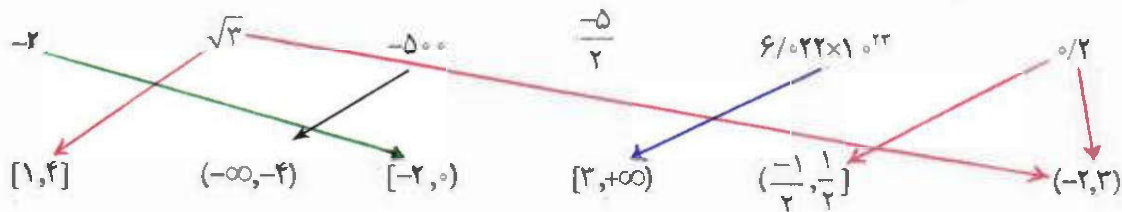
## گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

### کار در کلاس

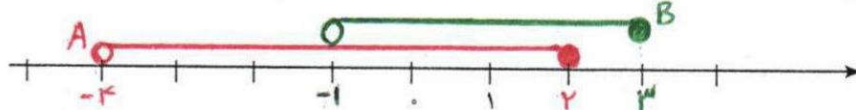
۱ درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید:

- الف)  $\frac{4}{3} \in [\frac{1}{3}, 2)$   ب)  $-2 \in (-2, 0]$   ج)  $0 \in (-2, 0]$   د)  $-2 \in \{-2, 0\}$   ه)  $-1 \in \{-2, 0\}$    
 خ)  $\sqrt{2} \in (0, 1)$   ی)  $[2, 5) = (2, 5]$   ز)  $\emptyset \subseteq (-17, 0]$   چ)  $\{0, 1\} \subseteq (-1, 2)$   ط)  $[-1, 2] \subseteq (-1, 2)$   ق)  $\sqrt{2} \in (0, 1)$

۲ هر یک از اعداد زیر عضو یک یا چند تا از بازه‌های داده شده هستند. هر عدد را به بازه یا بازه‌های نظیر آن وصل کنید.



۳ نمایش هندسی دو بازه  $A = (-4, 2]$  و  $B = (-1, 3]$  را روی محور زیر رسم کنید و سپس حاصل عبارتهای زیر را بنویسید.



- الف)  $A \cap B = (-1, 2]$  ب)  $A \cup B = (-4, 3]$  ج)  $A - B = (-4, -1]$  د)  $B - A = (2, 3]$

### مجموعه‌های منتهی و نامنتهای

#### فعالیت

فرض کنید  $A$  مجموعه اعداد طبیعی کمتر از ۴ و  $B$  مجموعه اعداد صحیح کمتر از ۴ باشد.

الف) این دو مجموعه را با نمایش اعضای آنها مشخص کنید.

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{0, 1, 2, 3\}$$

ب)  $A$  چند عضو دارد؟ **۳ عضو**

پ) درباره تعداد اعضای  $B$  چه می‌توان گفت؟ **تعداد اعضای مشخص نیست (بسیار عضو دارد)**

مجموعه‌هایی مانند  $A$  را که تعداد اعضای آنها یک عدد حسابی است، مجموعه‌های منتهی می‌نامیم.

با توجه به مطلب فوق،  $B$  یک مجموعه منتهی نیست؛ زیرا (نمی‌توان تعداد اعضای آن را با یک عدد بیان کرد. در واقع تعداد اعضای این

مجموعه از هر عددی که در نظر بگیریم بزرگ‌تر است. چنین مجموعه‌هایی را مجموعه‌های نامنتهای می‌نامیم.)

## تهیه کننده:

## گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

## تهیه کننده:

## گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

### کارد رگلاس

۱. متناهی یا نامتناهی بودن هر یک از مجموعه‌های زیر را مشخص کنید. دربارهٔ مجموعه‌های متناهی سعی کنید تعداد دقیق یا تقریبی اعضای هر یک از آنها را بنویسید.



جنگل‌های آمازون

آمازون که به ربه‌های زمین مشهور است، جنگل بسیار بزرگی در شمال آمریکای جنوبی است و بدلیل همین وسعت به آن جنگل‌های آمازون گفته می‌شود. حدود ۶۰ درصد این جنگل در خاک برزیل قرار دارد. همچنین بخش‌هایی از آن هم در کشورهای پرو، اکوادور، گویان، کلمبیا، ونزوئلا، بولیوی و سورینام واقع شده است. در واقع این جنگل بیش از سه برابر خاک کشور ما وسعت دارد. رودخانه آمازون با طول حدود ۶۵۰۰ کیلومتر به عنوان پرآب‌ترین رودخانه دنیا که ۵ درصد آب شیرین جهان را در خود جای می‌دهد، نیز از دل این جنگل عبور می‌کند. نتیجه یک مطالعه بزرگ که مدت ۱۰ سال به طول انجامید، نشان می‌دهد که  $290/000/000/000$  اصله درخت در ۱۶۰۰۰ گونه مختلف در جنگل‌های آمازون وجود دارد. با این حساب سهم هر فرد دنیا از این جنگل چند درخت می‌شود؟! با وجود این، مجموعه درخت‌های جنگل‌های آمازون یک مجموعه متناهی محسوب می‌شود یا نامتناهی؟



طرحی از سلول‌های عصبی مغز

تعداد اعضا (در مورد مجموعه‌های متناهی)	متناهی	نامتناهی	مجموعه
{۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱}	✓		مجموعه اعداد اول یک رقمی
۴ عضو	✓		مجموعه انسان‌های روی زمین
		✓	مجموعه اعداد طبیعی فرد
	✓		مجموعه سلول‌های عصبی مغز یک انسان
		✓	مجموعه تمام دایره‌های به مرکز مبدأ مختصات
	✓		مجموعه دانش آموزان مدرسه شما
	✓		مجموعه اعداد طبیعی ده رقمی
	✓		مجموعه درخت‌های جنگل‌های آمازون
		✓	مجموعه کسرهای مثبت با صورت یک
		✓	مجموعه مضرب‌های طبیعی عدد ۱۰
		✓	بازده (۱، ۰)
	✓		مجموعه مولکول‌های موجود در یک مول مشخص از آب

۲. دو مجموعه متناهی نام ببرید. مجموعه جبران ریاضی اهواز - مجموعه ی ما سن های

۳. دو مجموعه نامتناهی، مثال بزنید که یکی از آنها زیرمجموعه دیگری باشد. مجموعه ی اعداد

۴. دو مجموعه نامتناهی مثل A و B مثال بزنید که  $A \subseteq B$  بوده و B-A تک عضوی باشد.

تذکر: تعادل اعضای برخی از مجموعه‌های متناهی ممکن است بسیار زیاد باشد؛ با این حال با داشتن امکانات لازم و صرف وقت کافی ممکن است بتوان تعداد آنها را به دست آورد.

۶. ادا هی جواب ۳) یا ۲ باز ی (اره) و (۳ و ۷) که  $(۳ و ۷) \subseteq (اره)$

یا مجموعه ی دایره های به مرکز مبدأ مختصات با شعاع عدد صحیح که زیر مجموعه ی معادلس نام نامبر های به مرکز مبدأ مختصات است.

کلی عضوی

## تهیه کننده:

## گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

### فعالیت

الف) عددی بین ۰ و ۱ است. چهار عدد گویای دیگر از بازه (۰, ۱) بنویسید و جواب

خره در ابا جوابهای دوستانان مقایسه کنید.  $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{4}{7}, \frac{1}{1000}$

ب) آیا می توان بین ۰ و ۱ به هر تعداد دلخواه عدد گویا ارائه کرد؟ بله

پ) در مورد منتهای یا نامنتهای بودن اعداد گویای موجود در بازه (۰, ۱) چه نتیجه ای می گیرید؟

ت) در مورد منتهای یا نامنتهای بودن Q چه می توان گفت؟ نامنتهای

ث) اگر A دارای یک زیر مجموعه نامنتهای باشد، آنگاه A یک مجموعه نامنتهای خواهد بود.

عدد آووگادرو

در نسیمی تعداد  $6.022 \times 10^{23}$  عدد از هر ذره (مولکول یا اتم) را یک مول از آن ذره می نامند. برای درک میزان بزرگی این عدد، فرض کنیم تعداد مولکولهای موجود در یک مول آب را که ۱۸ گرم است، بتوانیم مولکول به مولکول بشماریم و کار شمرن هر مولکول آن هم یک ثانیه زمان ببرد. در این صورت کار شمارش نزدیک به ۲۰ میلیون میلیارد سال به طول خواهد انجامید که این زمان حدود یک میلیون برابر عمر جهان است! به نظر شما، مجموعه مولکول های یک مول مشخص از آب، یک مجموعه منتهای است یا نامنتهای؟

### تمرین

۱) فرض کنید U مجموعه تمام مضربهای طبیعی عدد ۵ باشد.

الف) U را با نمایش اعضای آن بنویسید.  $U = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, \dots\}$

ب) U منتهای است یا نامنتهای؟ نامنتهای

ب) یک زیر مجموعه منتهای از U بنویسید.  $\{5, 10, 15, 20, 25\}$  مضرب طبیعی ۵ که حقیقتاً ۳۰

ت) دو زیر مجموعه نامنتهای مانند C و D از U بنویسید: به طوری که  $C \subseteq D$ .

۲) منتهای یا نامنتهای بودن مجموعه های زیر را مشخص کنید.

الف) مجموعه اعداد طبیعی. نامنتهای

ب) مجموعه شماره های طبیعی عدد ۳۶. منتهای

ب) بازه  $(\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$ . نامنتهای

ت)  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < 2\}$ . منتهای (با توجه به اینکه  $\mathbb{N}$  همشود  $\emptyset$ )

ث) مجموعه مضربهای طبیعی عدد ۱۰۰. نامنتهای

۳) دو مجموعه نامنتهای مثل بزیند که اشتراک آنها مجموعه ای منتهای باشد.  $(2, 5]$  و  $[-3, 2)$  که اشتراک آنها مجموعه  $\{2\}$  است که منتهای است

۴) حاصل هر یک از مجموعه های زیر را با رسم بازدهای آنها روی یک محور به دست

آورید:

الف)  $(-2, 5] \cup (-3, 0) = (-3, 5]$  ب)  $(-\infty, 6] \cap (2, 9) = (2, 6]$

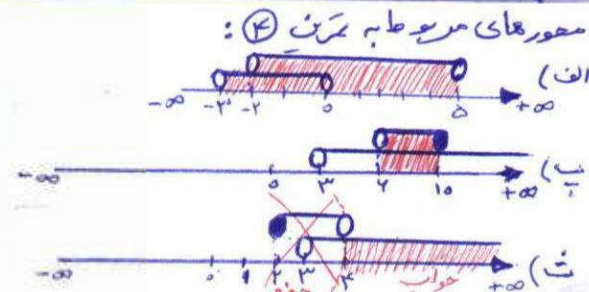
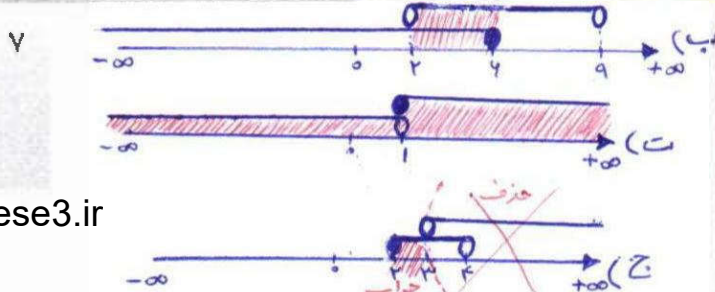
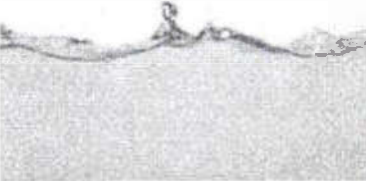
ب)  $(3, +\infty) \cap (6, 10) = (6, 10)$  ت)  $(-\infty, 1) \cup [1, +\infty) = \mathbb{R}$

ث)  $(3, +\infty) - [2, 4) = [4, +\infty)$  ج)  $[2, 4) - (3, +\infty) = [2, 3)$

۵) مجموعه  $\mathbb{R} - \{3\}$  را روی محور نشان دهید و سپس آن را بصورت اجتماع دو بازه

بنویسید.  $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$

۶) اگر  $A \subseteq B$  و B مجموعه ای منتهای باشد، آنگاه A منتهای خواهد بود یا نامنتهای؟ منتهای

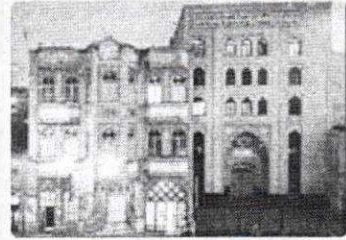




درس دوم: متمم یک مجموعه

مجموعه مرجع

فرض کنیم  $U$  نشان دهنده مجموعه تمام کتابهای کتابخانه آیت الله العظمی مرعشی نجفی (ره) و مجموعه کتابهای خطی آن باشد. اگر مجموعه‌ای را که شامل کتابهای چاپی این کتابخانه است، با  $A'$  نشان دهیم، آنگاه می‌توانیم نمودار پایین صفحه را درباره کتابهای این کتابخانه رسم کنیم. در این مثل  $U$  را که شامل تمام کتابهای کتابخانه می‌باشد، مجموعه مرجع و  $A'$  را متمم مجموعه  $A$  می‌نامیم.

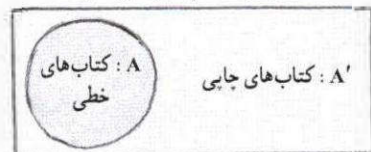


کتابخانه آیت الله العظمی مرعشی نجفی (ره)، در شهر مفسس قم یکی از بزرگترین کتابخانه‌های جهان اسلام است که کتابهای نفیس و قیمتی بسیاری را در موضوعات مختلف در خود جای داده است. این کتابخانه از نظر فراوانی نسخه‌های خطی، نخستین کتابخانه کشور و سومین کتابخانه جهان اسلام بشمار می‌رود. جنود زیر اطلاعات مختصری درباره تعداد کتابهای این کتابخانه در اختیار ما قرار می‌دهد.

نوع کتاب	تعداد
کتابهای خطی	۲۲۰۰۰ جلد
کتابهای چاپی	۱۰۰۰۰۰۰ جلد
کل کتابها	۱۰۲۲۰۰۰ جلد



$U$ : مجموعه تمام کتابهای کتابخانه

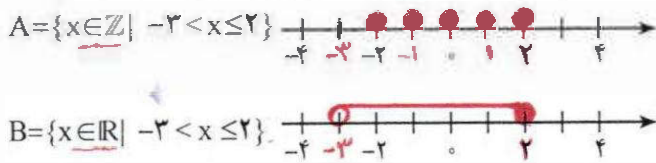


در هر مبحث، مجموعه‌ای را که همه مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعه آن باشند، مجموعه مرجع می‌نامیم و آن را با  $U$  نشان می‌دهیم.

هر گاه  $U$  مجموعه مرجع باشد و  $A \subseteq U$ ، آنگاه مجموعه  $U - A$  را متمم  $A$  می‌نامیم و آن را با نماد  $A'$  نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر  $A'$  شامل عضوهای  $U$  است که در  $A$  نیستند.

فعالیت

الف) دو مجموعه زیر را در نظر بگیرید و اعضای هر یک را روی محور نشان دهید.



ب)  $A$  را با نمایش اعضا و  $B$  را به صورت یک بازه بنویسید.

$A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

$B = (-3, 2]$

پ) در مورد  $A$ ، اگر مجموعه مرجع را  $Z$  در نظر بگیریم،  $A'$  را مشخص کنید.

$A' = Z - A = \{\dots, -4, -3, 3, 4, \dots\} \subseteq \{\dots, \pm 3, \pm 4, \dots\}$

ت) در مورد  $B$  یا فرض این که  $IR$  مجموعه مرجع باشد،  $B'$  را مشخص کنید و آن را روی محور نمایش دهید.



تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

# تهیه کننده:

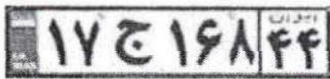
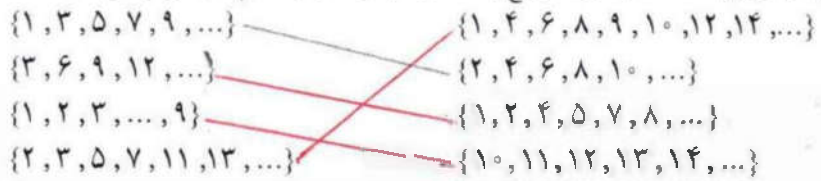
## گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

کار در کلاس

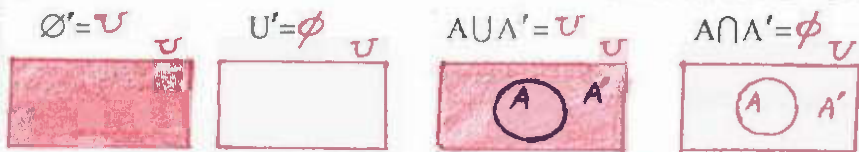


۱ اگر  $U$  مجموعه شامل تمام استان‌های کشورمان باشد و  $A$  مجموعه استان‌های غیر ساحلی، آنگاه  $A'$  را با نمایش اعضای آن بنویسید.  
 $A' = U - A = \{ \text{سیستان و بلوچستان، هرمزگان، بوشهر، خوزستان، گلستان، مازندران، گیلان، اردبیل} \}$

۲ فرض کنیم  $U$  مجموعه تمام اتومبیل‌های پلاک گذاری شده کشور و  $B$  مجموعه اتومبیل‌های با پلاک فرد باشد. در این صورت  $B'$  چه مجموعه‌ای خواهد بود؟  
 با فرض آنکه  $N$  مجموعه مرجع باشد، هر مجموعه را به متمم خودش وصل کنید.



۳ با فرض آنکه  $N$  مجموعه مرجع باشد، هر مجموعه را به متمم خودش وصل کنید.  
 ۴  $U$  مجموعه مرجع و  $A$  زیرمجموعه دلخواهی از آن می‌باشد. با رسم نمودار طرف دوم تساوی‌های زیر را بنویسید. (مثال عددی اضافه در حل شود)



**نوع بیکاری**  
 جمعیت در سن کار در یک کشور را به عنوان مجموعه مرجع یعنی  $U$  در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم  $A$  نشان دهنده مجموعه افراد شاغل این کشور باشد. در این صورت  $A'$  برابر مجموعه افراد بیکار و نسبت  $\frac{n(A')}{n(U)}$  بیانگر نرخ بیکاری آن کشور خواهد بود.

۵ الف) اگر  $Z$  را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیریم، آنگاه  $N'$  را با نوشتن اعضای آن مشخص کنید.  
 $N' = Z - N = \{ 0, -1, -2, -3, \dots, -100 \}$

ب) اگر  $R$  را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیریم در این صورت  $N'$  را روی محور نمایش دهید.  
 $N' = R - N$

۶ فرض کنیم  $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  مجموعه مرجع باشد و  $A = \{1, 2, 3\}$  و  $B = \{2, 4\}$  ابتدا  $A'$  و  $B'$  را بنویسید و سپس جدول‌های زیر را کامل کنید. از هر قسمت چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$A' = \{ 4, 5 \}$        $B' = \{ 1, 3, 5 \}$

$(A)'$	$(A \cup B)'$	$A \cap B'$
$\{1, 2, 3\} = A$	$\{5\}$	$\{5\}$
$A \cup B$	$(A \cap B)'$	$A' \cup B'$
$\{1, 2, 3, 4\}$	$\{5\}$	$\{1, 3, 4, 5\}$
$A \cap B$	$A - (A \cap B)$	
$\{2\}$	$\{1, 3, 4, 5\}$	
$A - B$		
$\{1, 3\}$		

$(A')' = A$  متمم متمم هر مجموعه برابر خود مجموعه است.  
 $(A \cup B)' = A' \cap B'$  متمم اجتماع دو مجموعه برابر با تقاطع متمم‌های آن دو مجموعه است.  
 $(A \cap B)' = A' \cup B'$  متمم اشتراک دو مجموعه برابر با اجتماع متمم‌های آن دو مجموعه است.  
 $A - B = A - (A \cap B)$

$B - A = B - (A \cap B)$

توجه:  $A - B = A \cap B'$  و  $B - A = B \cap A'$

## تهیه کننده:

## گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

تعداد اعضا و اجتماع دو مجموعه

### تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه

در سل گذشته دیدیم که اگر  $A$  یک مجموعه متناهی باشد، آنگاه برای نشان دادن تعداد عضوهای آن از علامت  $n(A)$  استفاده می‌شود. مثلاً اگر  $G = \{2, 3, 5, 7\}$  در این صورت می‌توانیم بنویسیم  $n(G) = 4$ . در این بخش می‌خواهیم رابطه‌ای برای  $n(A \cup B)$  به دست آوریم.

### فعالیت

۱ یک تیم کوه‌نوردی متشکل از ۴ دانش‌آموز و ۳ دانشجوی عضو یک مؤسسه طرفدار محیط زیست است. اعضای این تیم به‌طور داوطلبانه در روزهای جمعه هر هفته کوه‌های اطراف شهر خود را از وجود زباله پاک‌سازی می‌کنند. اعضای دانش‌آموز این تیم مجموعه  $\{آینا، زهرا، الناز، الهام\} = A$  و اعضای دانشجوی آن مجموعه  $\{فاطمه، معصومه، فرزانه\} = B$  هستند. همان‌گونه که دیده می‌شود، این دو مجموعه هیچ عضو مشترکی ندارند؛ به عبارت دیگر  $A \cap B = \emptyset$ .



به هر دو مجموعه مثل  $A$  و  $B$  که فاقد عضو مشترک باشند، دو مجموعه جدا از هم یا مجزا می‌گوییم.

$$(A \cap B = \emptyset)$$

الف) اعضای  $A \cup B$  را که بیانگر اعضای تیم کوه‌نوردی می‌باشد، بنویسید و جدول زیر را تکمیل کنید.

$$A \cup B = \{ \text{آینا، زهرا، الناز، الهام، فاطمه، معصومه، فرزانه} \}$$

A	B
آینا	فاطمه
زهرا	معصومه
الناز	فرزانه
الهام	

$n(A)$	$n(B)$	$n(A \cup B)$	$n(A \cap B)$
۴	۳	۷	۰

جمع تعداد عضوهای  $A$  و  $B$  با هم برابر تعداد عضوهای  $A \cup B$  است.

ب) تعداد عضوهای  $A \cup B$  چه رابطه‌ای با  $n(A)$  و  $n(B)$  دارد؟ این رابطه را به صورت یک فرمول بنویسید.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

پ) تحت چه شرایطی این فرمول برای دو مجموعه دلخواه  $A$  و  $B$  برقرار است؟ با استفاده از این فرمول دو مجموعه اشتراکی نداشته باشند یعنی  $A \cap B = \emptyset$  (جدول هم)

۲ الف) مجموعه شماره‌های طبیعی دو عدد ۲۸ و ۳۰ را به ترتیب  $A$  و  $B$  می‌نامیم. موارد خواسته شده را بنویسید.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28\} \Rightarrow n(A) = 28$$

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30\} \Rightarrow n(B) = 30$$

$$A \cap B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28\} \Rightarrow n(A \cap B) = 28$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30\} \Rightarrow n(A \cup B) = 30$$

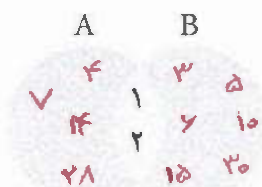
$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30\}$$

## تهیه کننده:

### گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

(ب) جدول زیر را کامل کنید.

$n(A)$	$n(B)$	$n(A \cap B)$	$n(A \cup B)$
۶	۸	۲	۱۲



(پ) چرا رابطه‌ای را که در فعالیت (۱) به دست آوردید؛ یعنی  $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$  در این مثل برقرار نیست؟ چون مجموعه‌های A و B هم‌پوشش دارند، یعنی  $A \cap B \neq \emptyset$

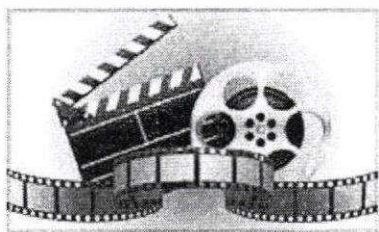
(ت) با تکمیل نمودار مقابل، سعی کنید رابطه درست برای  $n(A \cup B)$  را حدس بزنید.

همان‌طور که دیدیم، اگر A و B دو مجموعه متناهی دلخواه باشند، داریم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

با توجه به نمودار روبه‌رو، در مورد علت درستی این رابطه با دوستان خود بحث کنید.

#### کاردرکلاس



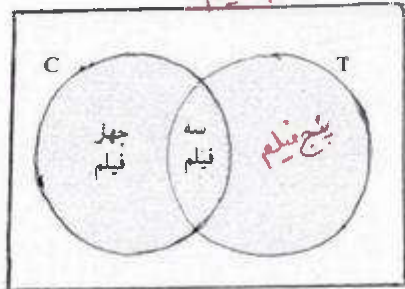
۱. یک دوره جشنواره فیلم کوتاه با شرکت ۲۱ فیلم در موضوعات مختلف در حال برگزاری است که در بین آنها ۷ فیلم پویانمایی (کارتونی) و ۸ فیلم طنز وجود دارد، به طوری که ۳ تا از فیلم‌های پویانمایی با مضمون طنز می‌باشند. مطلوب است تعداد کل فیلم‌هایی که:

(الف) پویانمایی یا طنزند.

(ب) غیرپویانمایی و غیرطنزند.

روش اول حل: مجموعه شامل تمام فیلم‌ها را با U، مجموعه فیلم‌های پویانمایی را با C و مجموعه فیلم‌های طنز را با T نشان می‌دهیم. جاهای خالی را پر کنید و جواب‌ها را بیابید.

$n(A) = n(U) - n(B)$   
 ← طرفی که پویانمایی  
 ← طرفی که طنز  
 ← ۲۱ فیلم



الف)  $n(C \cup T) = n(C) + n(T) - n(C \cap T) = 7 + 8 - 3 = 12$

ب)  $n(C \cup T)' = n(U) - n(C \cup T) = 21 - 12 = 9$

روش دوم حل: در نمودار وین مقابل، دو مجموعه C و T سطح درون U را به چهار ناحیه جداگانه تقسیم کرده‌اند که عدد مربوط به دوتا از نواحی نوشته شده است. با نوشتن اعداد مربوط به دو قسمت دیگر، جواب قسمت‌های (الف) و (ب) را بیابید.

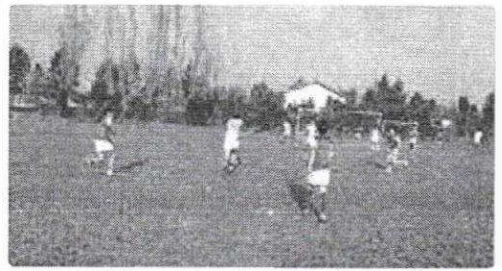
الف)  $n(C \cup T) = 4 + 3 + 5 = 12$  (پنج فیلم یا طنز)

ب)  $n(C \cup T)' = 21 - 12 = 9$  (پنج فیلم غیرپویانمایی و غیرطنز)

## تهیه کننده:

## گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

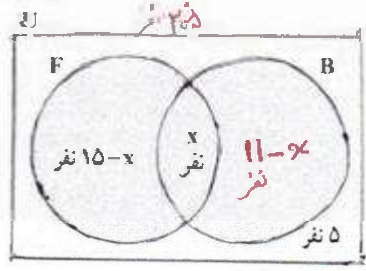
فصل اول مجموعه ها و عملیات



۲ در یک کلاس ۲۵ نفری، تعداد ۱۵ نفر عضو تیم فوتبال و ۱۱ نفر عضو تیم بسکتبال کلاس هستند. اگر ۵ نفر از دانش آموزان این کلاس عضو هیچ یک از این دو تیم نباشند مشخص کنید چند نفر از آنها عضو هر دو تیم هستند.

روش اول حل: با تکمیل نمودار زیر مقدار  $x$  را بیابید.

$$\begin{aligned} (15-x) + x + (11-x) + 5 &= 25 \\ 31 - x &= 25 \\ x &= 31 - 25 \\ \boxed{x=6} &\rightarrow n(B \cap F) \end{aligned}$$



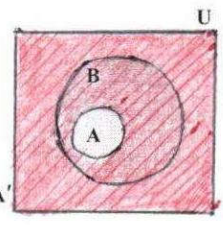
۲۵ نفر عضو هر دو تیم

روش دوم حل: چون ۵ نفر عضو هیچ یک از این دو تیم نیستند، پس  $n(B \cup F) = 20$ . حال

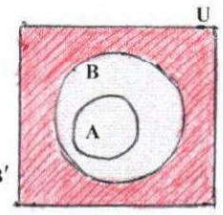
با نوشتن فرمول  $n(B \cup F) = n(B) + n(F) - n(B \cap F)$  می توان  $n(B \cap F)$  را به دست آورد

$$20 = 11 + 15 - n(B \cap F) \Rightarrow n(B \cap F) = 24 - 20 = 4 \Rightarrow \boxed{n(B \cap F) = 4}$$

۳ الف) فرض کنیم  $A \subseteq B \subseteq U$  که در آن  $U$  مجموعه مرجع است. در نمودارهای مقابل  $A'$  و  $B'$  را مشخص کنید و سپس تعیین کنید که آیا بین  $A'$  و  $B'$  هم رابطه زیر مجموعه بودن برقرار است؟ چگونه؟



$A'$  را هاشور بزنید



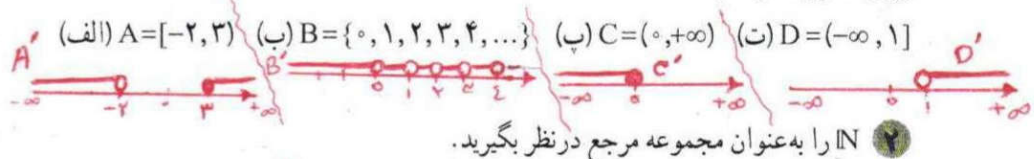
$B'$  را هاشور بزنید

ب) اگر  $U = \{a, b, c, d, e\}$  مجموعه مرجع باشد و  $A = \{a, b\}$  و  $B = \{a, b, c\}$ ، در این صورت  $A \subseteq B$  می باشد. با به دست آوردن  $A'$  و  $B'$  نشان دهید که بین  $A'$  و  $B'$  هم رابطه زیر مجموعه بودن برقرار است.

$$\begin{aligned} A' &= U - A = \{c, d, e\} \\ B' &= U - B = \{d, e\} \end{aligned} \Rightarrow B' \subseteq A'$$

### تمرین

۱ IR را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیرید و سپس متمم های زیر را روی محور نشان دهید.



۲ IN را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیرید.

الف) مجموعه ای نامتناهی مثل A مثال بزنید که  $A'$  هم نامتناهی باشد. مجموعه ای نامتناهی زوج فرد  $A'$ .

ب) مجموعه ای نامتناهی مثل B مثال بزنید که  $B'$  متناهی باشد.

ب) مجموعه ای متناهی مثل C مثال بزنید و  $C'$  را به دست آورید.  $C'$  متناهی است یا نامتناهی؟ نامتناهی.

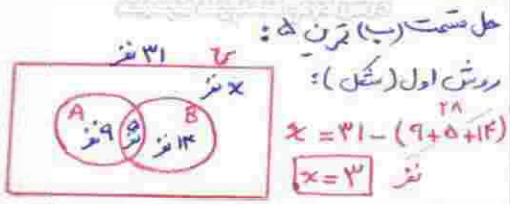
نامتناهی  $B = \{5, 7, 9, 11, \dots\}$  بزرگتر از ۴  
متناهی  $B' = \{1, 2, 3, 4\}$  کوچکتر یا مساوی ۴

$$\begin{aligned} C &= \{2, 3, 5, 7\} \text{ (متناهی)} \rightarrow \text{اعداد طبیعی کوچکتر از ۱۰} \\ C' &= \{1, 4, 6, 8, 9, 10, \dots\} \text{ (نامتناهی)} \end{aligned}$$

## تهیه کننده:

## گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

(الف)  $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$       (ب)  $n(A \cap B') = n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 70 - 20 = 50$   
 $n(A \cup B) = 70 + 40 - 20 \Rightarrow n(A \cup B) = 90$       (پ)  $n(A' \cap B) = n(B \cap A') = n(B) - n(A \cap B) = 40 - 20 = 20$   
 (ت)  $n(A' \cap B') = n(A \cup B)' = n(U) - n(A \cup B) = 100 - 90 = 10$



روش دوم (متردد):  
 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$   
 $= 14 + 19 - 5 = 28$   
 $n(A \cup B)' = n(U) - n(A \cup B)$   
 $= 31 - 28 = 3$

۳ اگر  $n(A) = 15$ ,  $n(A \cap B) = 5$  و  $n(A \cup B) = 30$  آنگاه  $n(B)$  را محاسبه کنید.  
 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow 30 = 15 + n(B) - 5$   
 $n(B) = 30 - 10 = 20 \Rightarrow n(B) = 20$   
 ۴ فرض کنیم A و B زیر مجموعه‌هایی از مجموعه مرجع U باشند، به طوری که  $n(U) = 100$   
 $n(A) = 60$ ,  $n(B) = 40$  و  $n(A \cap B) = 20$  مطلوب است:  
 (الف)  $n(A \cup B)$       (ب)  $n(A \cap B')$       (پ)  $n(A' \cap B)$       (ت)  $n(A' \cap B')$

۵ در یک کلاس ۳۱ نفری، تعداد ۱۲ نفر از دانش‌آموزان عضو گروه سرود و ۱۹ نفر آنها عضو گروه تئاترند. اگر ۵ نفر از دانش‌آموزان این کلاس عضو هر دو گروه باشند، مطلوب است:  
 (الف) تعداد دانش‌آموزانی که فقط عضو گروه سرودند.  
 $14 - 5 = 9$   
 (ب) تعداد دانش‌آموزانی که عضو هیچ یک از این دو گروه نیستند.



۶ در یک نظرسنجی از ۱۱۰ مشتری یک فروشگاه زنجیره‌ای، مشخص شد که ۷۰ نفر آنها در یک ماه گذشته از محصولات شرکت A و ۵۷ نفرشان از محصولات شرکت B خرید کرده‌اند. همچنین ۲۲ نفر از آنان نیز اعلام کردند که در این مدت از هر دو شرکت خرید کرده‌اند. چه تعداد از این ۱۱۰ نفر در یک ماه گذشته:  
 (الف) دست کم از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند.  
 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$   
 $= 70 + 57 - 22 = 105$   
 (ب) فقط از شرکت A خرید کرده‌اند.  
 $70 - 22 = 48$   
 (پ) دقیقاً از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند.  
 $48 + 25 = 73$   
 (ت) از هیچ یک از این دو شرکت خرید نکرده‌اند.  
 $n(A' \cap B') = n(A \cup B)' = n(U) - n(A \cup B) = 110 - 105 = 5$



## تهیه کننده:

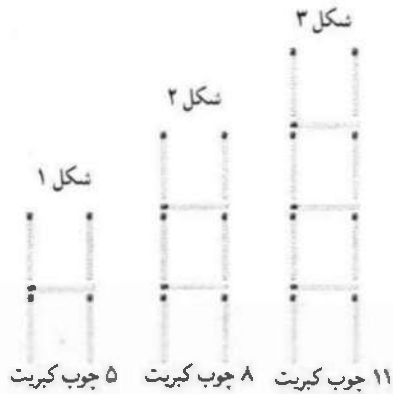
### گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

#### درس سوم: الگو و دنباله

#### الگو

#### مثال

به شکل های زیر و تعداد چوب کبریت های به کار رفته در هر یک از آنها توجه کنید.



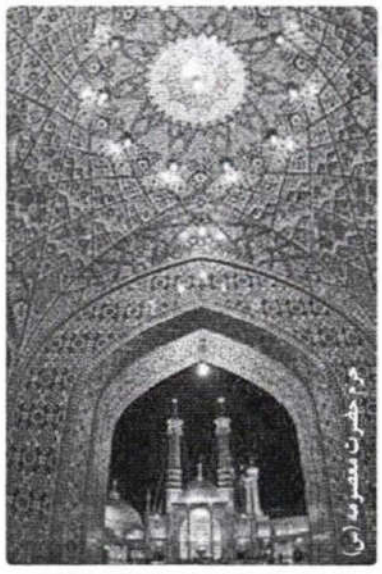
شماره شکل: $n$	۱	۲	۳	۴	...	$n$	...
تعداد چوب کبریتها: $a_n$	۵	۸	۱۱	...	...	...	...
رابطه بین $a_n$ و $a_{n+1}$	$a_1=5$	$a_2=8$	$a_3=11$	...	...	$a_n=...$	...

به عنوان مثال ملاحظه می شود که، «تعداد چوب کبریت های شکل اول برابر ۵ است» که این مطلب را به طور خلاصه به صورت  $a_1=5$  نشان دادیم (می خوانیم:  $a$ : اندیس ۱ برابر ۵). عبارت های  $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$  متغیرهای اندیس دار نامیده می شوند که مقادیر آنها به ترتیب ۵، ۸ و ۱۱ است. به این اعداد جملات الگو هم گفته می شود. پس در واقع، عدد ۵ جمله اول الگو است؛ ۸ جمله دوم آن و به همین ترتیب الی آخر.



- الف) با این نمادگذاری،  $a_n$  نشان دهنده چیست و مقدار آن چقدر است؟ جمله چهارم الگو - ۱۴
- ب)  $a_n$  به چه معناست؟ جمله  $n$  ام الگو
- پ) آیا می توانید حاصل  $a_n$  را بر حسب  $n$  به دست آورید؟ برای این کار فعالیت بعد را انجام دهید.

۱- در سال های گذشته با متغیرهایی مثل  $x, y, z$  و ... سروکار داشتیم که اسم آنها تک حرفی بود؛ در حالی که نام متغیرهای اندیس دار که در اینجا به کار می بریم، دو بخشی است. پس تفاوت این دو نوع متغیر، تنها در شکل نام گذاری آنهاست و از نظر ماهیت، تفاوتی با هم ندارند.



دنیای اطراف ما سرشار از الگوهای مختلفی است. به عنوان نمونه، بیدایش شبانه روز و تغییر فصول مختلف سل جلوه های از الگوی حاکم بر طبیعت است. از سوی دیگر نظم و قانونمندی های موجود در یک الگو به خودی خود برای ما جذاب است. چه بسا ممکن است طرح های روی یک گل آفتابگردان، شکل های هندسی روی یک سطح کاشی کاری شده یا ماریچ های روی میوه آناناس توجه شما را به خود جلب کرده باشند. به طور کلی می توان گفت الگو یک ساختار منظم از اشکال، تصاویر، صداها، نمادها، وقایع یا اعداد است که ممکن است تکرار شوند یا رشد کنند یا ترکیبی از این دو باشند.

از طرف دیگر یکی از رسالت های مهم ریاضیت، مدل سازی کردن پدیده های طبیعی و پی بردن به الگوهای نهفته در آنهاست. اهمیت این موضوع به قدری است که برخی از ریاضیدانان معتقدند که ریاضی عبارت است از علم مطالعه الگوها.

## تهیه کننده:

### گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

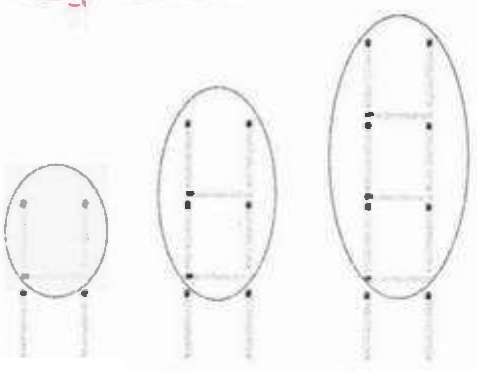
حل (۳) راه های دیگر برای به دست آوردن  $a_n$ :

$a_1 = 2(3) - 1$      $a_2 = 2(3) - 1$      $a_3 = 4(3) - 1$      $a_4 = 5(3) - 1$     ...     $a_n = (n+1)(3) - 1$   
 ساده شوی  
 یا اینها  
 همان  
 $a_n = 3n + 2$

بره اول  $a_1 = 2(4) - 3$      $a_2 = 2(4) - 4$      $a_3 = 2(4) - 5$      $a_4 = 5(4) - 6$     ...     $a_n = (n+1)(4) - (n+2)$   
 بره دوم  
 بره سوم  $a_1 = 5 + 0(3)$      $a_2 = 5 + 1(3)$      $a_3 = 5 + 2(3)$      $a_4 = 5 + 3(3)$     ...     $a_n = 5 + (n-1)(3)$

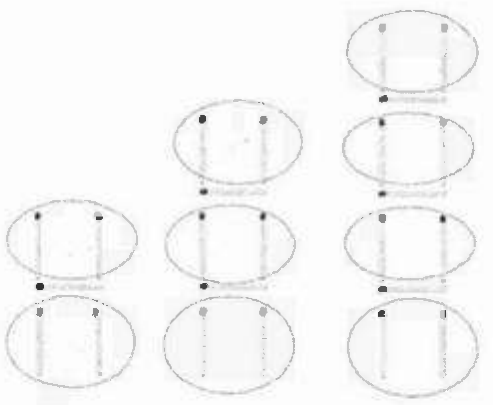
**تعمیم**

۱ آیدنا برای به دست آوردن حاصل  $a_n$  در مثال بالا، شکل های الگورا به صورت روبه رو در نظر گرفت. به کمک این روش، مقدار  $a_n$  را به دست آورید.



$a_1 = 1(3) + 2$      $a_2 = 2(3) + 2$      $a_3 = 3(3) + 2$      $a_4 = 4(3) + 2$     ...     $a_n = 10(3) + 2$     ...     $a_n = n(3) + 2$   
 مرتب شده است:  $a_n = 3n + 2$

۲ آیساروش دیگری را به کار برد. او تعداد چوب کبریت های افقی و عمودی در هر شکل را به طور جداگانه مورد توجه قرار داد تا بتواند به مقدار  $a_n$  دست یابد. مقدار حاصل برای  $a_n$  از این روش را در جای مشخص شده بنویسید.



$a_1 = 1 + 2(2)$      $a_2 = 2 + 2(2)$      $a_3 = 3 + 2(2)$      $a_4 = 4 + 2(2)$     ...     $a_n = 10 + (10+1)2$     ...     $a_n = n + (n+1)(2)$   
 چوب های عمودی    چوب های افقی

۳ آیا شما راه دیگری را برای به دست آوردن حاصل  $a_n$  می دانید؟ جواب در بالای صفحه

۴ همان طور که در قسمت های (۱) و (۲) دیدیم، آیدنا و آیساروش به ترتیب به صورت های  $a_n = 3n + 2$  و  $a_n = n + (n+1)(2)$  به دست آوردند. جواب آیساروش را ساده کنید تا به شکل جواب آیدنا درآید.

$a_n = n + 2n + 2 \Rightarrow a_n = 3n + 2$   
 همان جواب آیدنا

۵ به کمک رابطه  $a_n = 3n + 2$  تعداد چوب کبریت های شکل بیستم را بیابید.

$n = 10 \Rightarrow a_{10} = 3(10) + 2 = 32 \Rightarrow a_{10} = 32$

۶ با استفاده از رابطه  $a_n = 3n + 2$  مشخص کنید که چندمین شکل در الگوی بالا دارای ۷۷ قطعه چوب کبریت است. یعنی ۲۵ من شکل دارای ۷۷ قطعه چوب کبریت است.  $n = 25$

$a_n = 3n + 2 \Rightarrow 3n = 77 - 2 \Rightarrow n = \frac{75}{3} = 25 \Rightarrow n = 25$

تذکر: در مثال بالا دیدیم که  $a_n$  بیانگر تعداد چوب کبریت های شکل  $n$ ام است.  $a_n = 3n + 2$  را جمله عمومی الگو می نامیم؛ چرا که این رابطه در واقع ساختار جملات الگو را مشخص می کند و به کمک آن می توان مقدار هر جمله از الگو را به دست آورد. به عبارت دیگر، در اختیار داشتن جمله عمومی یک الگو به معنای آگاهی داشتن از تمام جملات آن الگو است.

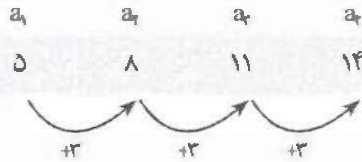


## تهیه کننده:

## گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

### الگوی خطی

در الگوی مثل قبل دیدیم که هر جمله دقیقاً ۳ واحد بیش از جمله قبلی از خودش بود.



(چنین الگوهایی را که در آنها اختلاف هر دو جمله متوالی عددی ثابت است، الگوهای خطی می‌نامیم) برای بی بردن به دلیل این نام‌گذاری، ستون سوم جدول مقابل را در نظر می‌گیریم. اگر این نقاط را در صفحه مختصات مشخص کنیم، همگی آنها روی خط  $y=3x+2$  قرار می‌گیرند. به عبارت دیگر مختصات تمام این نقاط در معادله خط گفته شده صدق می‌کند. شباهت بین معادله خط یعنی  $y=3x+2$  و جمله عمومی الگو یعنی  $a_n=3n+2$  اتفاقی نیست. عدد ۳ که در واقع اختلاف بین جملات متوالی الگو بوده، در معادله خط به عنوان شیب خط ظاهر شده است که این مطلب همواره درست است.

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots$$

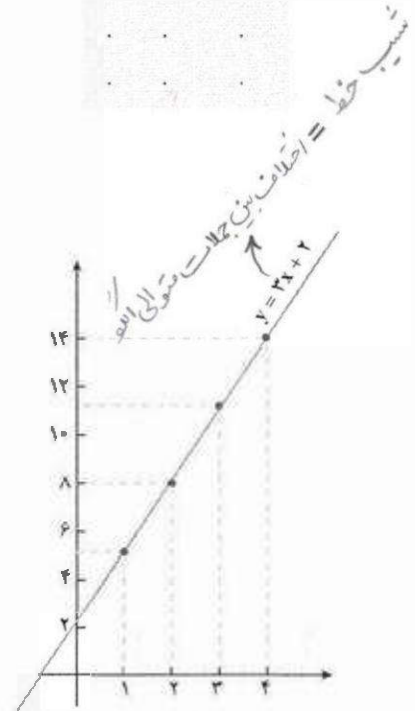
به طور کلی الگوهایی را که جمله عمومی آنها به صورت  $t_n = an + b$  است، الگوهای خطی می‌نامیم که در آن  $a$  و  $b$  اعداد حقیقی دلخواه و ثابت هستند.

دیدیم که در یک الگوی خطی با جمله عمومی  $t_n = an + b$ ، میزان تغییر جملات متوالی برابر  $a$  بود. به عبارت دیگر، اختلاف هر دو جمله متوالی در این الگوی خطی برابر ضریب  $n$  است. به عنوان مثال در یک الگوی خطی با جمله عمومی  $t_n = -4n + 15$ ، هر جمله نسبت به جمله قبل از خودش ۴ واحد کاهش می‌یابد:

$$11, 7, 3, -1, -5, -9, \dots$$

جدول الگوهای خطی

$n$	$a_n$	$(n, a_n)$
۱	۵	(۱, ۵)
۲	۸	(۲, ۸)
۳	۱۱	(۳, ۱۱)
۴	۱۴	(۴, ۱۴)
...	...	...



### مثال

در یک الگوی خطی، جملات چهارم و دهم به ترتیب ۱۷ و ۴۱ می‌باشند. جمله عمومی الگو را بیابید.

$$\alpha = \frac{\text{تفاضل } y\text{ها}}{\text{تفاضل } x\text{ها}} = \frac{41 - 17}{10 - 4} = \frac{24}{6} = 4 \quad \alpha = 4$$

حل: فرض کنیم جمله عمومی به صورت  $C_n = an + b$  باشد. پس داریم:

$$C_4 = 17 \Rightarrow a(4) + b = 17$$

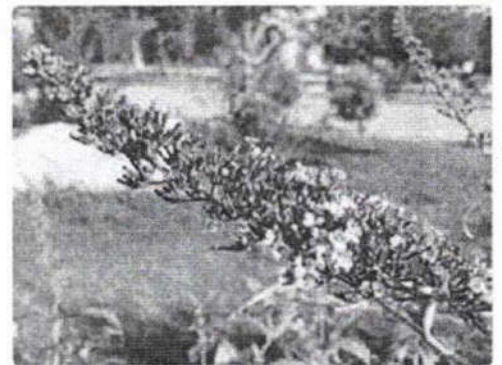
$$C_{10} = 41 \Rightarrow a(10) + b = 41$$

$$6a = 24 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow b = 1$$

پس  $C_n = 4n + 1$  بنابراین جملات الگو به صورت زیر خواهند بود:

$$5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, 41, 45, \dots$$

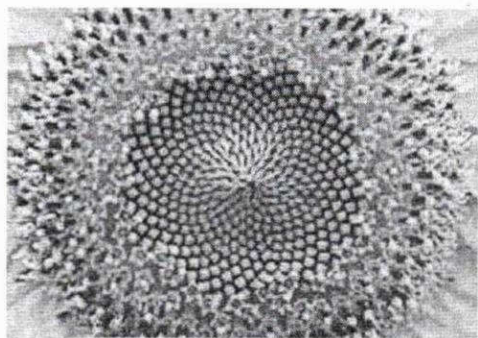
یعنی هر جمله نسبت به جمله قبلی از خودش ۴ واحد افزایش می‌یابد.



## تهیه کننده:

### گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

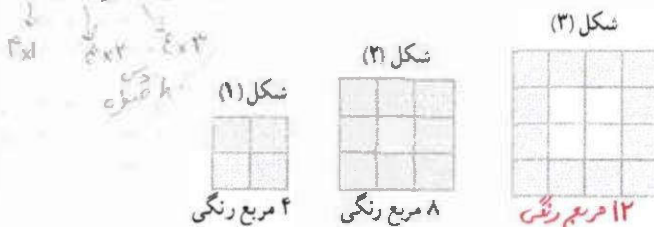
کار در کلاس



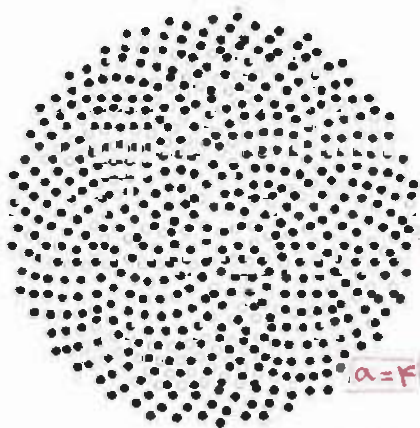
۱ شکل بعدی را در الگوی زیر رسم و جدول را کامل کنید.

$$+4 \quad +4 \quad +4$$

۴، ۸، ۱۲، ...



n : شماره شکل	۱	۲	۳	۴	۵
$b_n$ : تعداد مربع های رنگی	۴	۸	۱۲	۱۶	۲۰
رابطه بین $n$ و $b_n$	$b_1=4$	$b_2=8$	$b_3=12$	$b_4=16$	$b_5=20$



۲ تو ضیح دهید که چرا این الگوی یک الگوی خطی محسوب می شود. **چون اختلاف در جمله ی متوالی در هر مرحله عدد ثابت است**  
 ۳ با توجه به میزان افزایش جملات الگو، مقدار  $a$  در رابطه  $b_n = an + h$  را بیابید و پس از

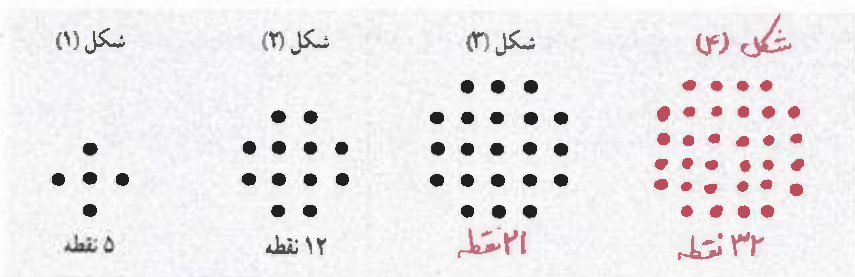
حس زدن مقدار  $h$ ، حاصل  $b_n$  را به دست آورید. **اختلاف هر دو جمله ی متوالی برابر ۴ است پس  $a=4$**   
 ۴ شکل شماره ۲۵ دارای چند مربع رنگی است؟  **$b_n = 4n + 0$  پس  $h=0$  و  $b_{25} = 4 \times 25 = 100$**

۵ در چه مرحله ای از الگوی بالا، تعداد مربع های رنگی برابر ۱۴۴ است؟  
 $b_n = 4n \Rightarrow 144 = 4n \Rightarrow n = \frac{144}{4} = 36 \Rightarrow n = 36$   
 یعنی در مرحله و شصتیم تعداد مربع های رنگی برابر ۱۴۴ تا می شود

الگوهای غیر خطی

فعالیت

۱ در الگوی زیر، شکل بعدی را رسم کنید و جدول را کامل نمایید.



n : شماره شکل	۱	۲	۳	۴	۵
$t_n$ : تعداد نقطه ها	۵	۱۲	۲۱	۳۲	...
رابطه بین $n$ و $t_n$	$t_1=5$	$t_2=12$	$t_3=21$	$t_4=32$	...

۲ آیا این الگوی یک الگوی خطی است؟ چرا؟ **خیر - چون اختلاف هر دو جمله ی متوالی در هر مرحله عددی ثابت نیست**

## تهیه کننده:

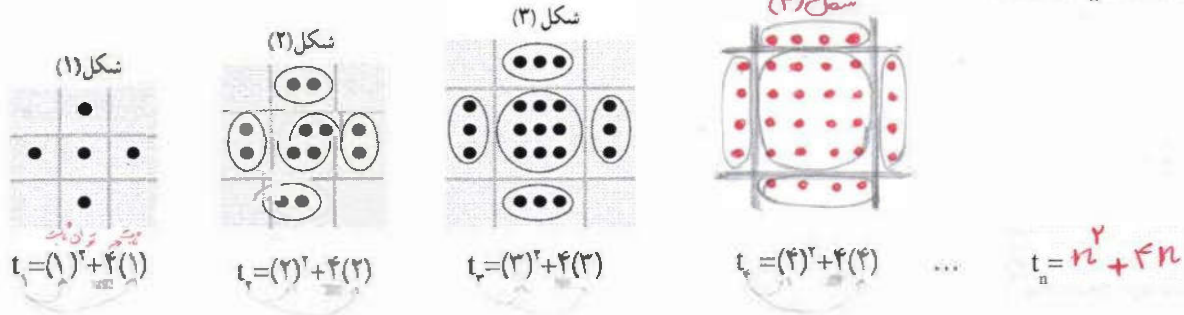
### گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

## تهیه کننده:

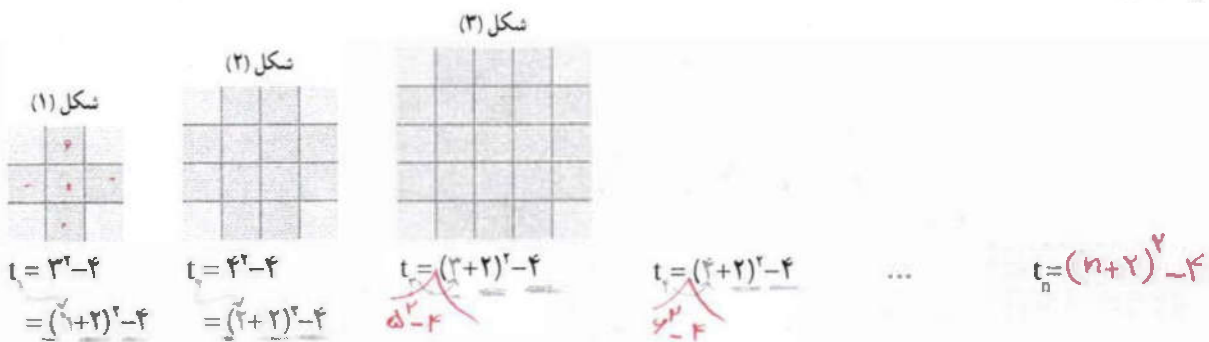
### گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه استان خوزستان

تاریخ: ...

۳ امیررضا برای یافتن جمله عمومی این الگو، مجموعه نقاط هر شکل را بصورت زیر دسته‌بندی کرد. از شکل‌های امیررضا کمک بگیرد و مقدار  $t_n$  را بیاید.



۴ امیرمحمد نگاه دیگری به مسئله داشت. او برای هر شکل این الگو، شکل دیگری را بصورت زیر نظیر کرد. با استفاده از این شکل‌ها مقدار  $t_n$  را بنویسید.



۵ نشان دهید که دو مقدار به دست آمده برای  $t_n$  در دو قسمت قبلی، برابرند.

آیا شما روش دیگری برای یافتن  $t_n$  می‌شناسید؟ پاسخ خود را با جواب دوستانتان مقایسه کنید.

$$t_n = (n+2)^2 - 4 = n^2 + 4n + 4 - 4 \Rightarrow t_n = n^2 + 4n$$

۶ آیا شما روش دیگری برای یافتن  $t_n$  می‌شناسید؟ پاسخ خود را با جواب دوستانتان مقایسه کنید.

### دنباله

در بخش قبل برای برخی الگوهای هندسی داده شده، یک الگوی عددی نظیر کردیم. به عنوان نمونه در فعالیت قبل، تعداد نقاط مربوط به شکل‌های متوالی الگو به صورت زیر بود:

۵، ۱۲، ۲۱، ۳۲، ۴۵، ...

این آرایش از اعداد، منلی از یک دنباله است.

سری (ردیف)

هر تعداد عدد را که پشت سر هم فرار می‌گیرند، یک دنباله می‌نامیم. این اعداد، جملات دنباله نامیده می‌شوند.

## تهیه کننده:

### گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

هر سرگرمی که دنباله است

# تهیه کننده:

## گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

توجه داریم که ممکن است جملات یک دنباله فاقد الگو باشند. مشابه صفحات قبل، جمله اول این دنباله را با  $t_1$ ، جمله دوم را با  $t_2$  و به همین ترتیب جمله  $n$ ام یا جمله عمومی آن را با  $t_n$  نمایش می دهیم. پس:

$$t_1 = 5, t_2 = 12, t_3 = 21, \dots, t_n = n^2 + 4n, \dots$$

گفتنی است که این دنباله یک دنباله درجه ۲ نامیده می شود؛ زیرا جمله عمومی آن یک چند جمله ای درجه دوم است.

بجمله آخر گفته شد

### کاردرکلاس

۱ دو دنباله دلخواه مثال بزنید.

۲ جمله عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد جاهای خالی را پر کنید.

الف)  $a_n = n^2 - 1$  : ۰, ۳, ۸, ۱۵, ۲۴

ب)  $b_n = -n + 4$  : ۳, ۲, ۱, ۰, -۱, -۲

ج)  $c_n = -12 + 2n$  : -۱۱, -۹, -۷, -۵, -۳

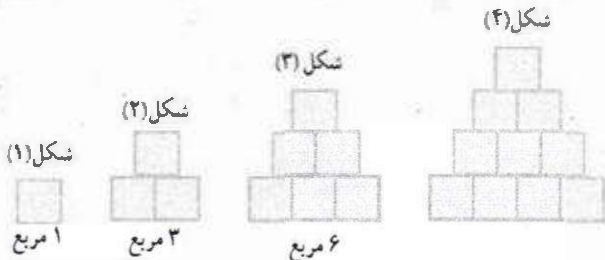
۳ در هر سطر از جدول زیر یک دنباله آمده است. در هر مورد سه جمله بعدی را بنویسید. همچنین در پنج مورد اول سعی کنید جمله عمومی دنباله را نیز حدس بزنید.

$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	...	$t_n$	...
-۱	-۲	-۳	-۴	-۵	-۶	-۷	...	-۱۱	...
۱	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt{11}$	$\sqrt{13}$	...	$\sqrt{2n-1}$	...
۱	۴	۹	۱۶	۲۵	۳۶	۴۹	...	$n^2$	...
۰/۱	۰/۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۰۰۱	۰/۰۰۰۰۰۱	۰/۰۰۰۰۰۰۱	...	$(۰/۱)^n$	...
-۱	۸	-۲۷	۶۴	-۱۲۵	۲۱۶	-۳۴۳	...	$(-1)n^3$	...
۵	۱۸	۲۱	۲۴	۵۷	۷۰	۸۳	...	$۱۳n - ۸$	...
-۲	۱	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{-1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{-1}{32}$	...	$(-1)^n \times 2^{2-n}$	...
۱	۲	۴	۷	۱۱	۱۶	۲۳	...	...	...
۳	۱	۴	۱	۵	۱	۶	۱	...	...
۱	۱	۲	۳	۵	۸	۱۳	۲۱	...	...
۲	۳	۵	۷	۱۱	۱۳	۱۷	...	...	...
۲	۳	۵	۷	۹	۱۱	۱۳	...	...	...

دنباله مربعی

کلاس دریا عدد اول است  
دنباله فیبوناچی  
عدد اول و اول و اول  
اولی یک واحد اضافه شده و بعدی ها از ۲

خواسته شده



۴ الگوی مقابل را در نظر بگیرید.

الف) تعداد مربع ها در الگو را به صورت یک دنباله تا جمله ششم آن بنویسید. ۱، ۳، ۶، ۱۰، ۱۵، ۲۱، ۲۸، ۳۶، ... (دنباله مثلثی)

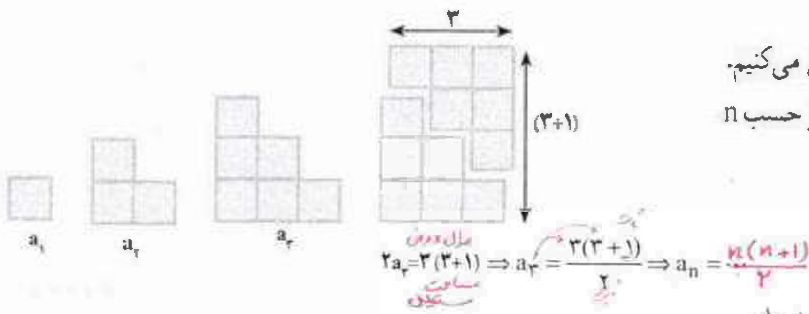
ب) آیا دنباله حاصل یک دنباله خطی است؟ چرا؟ هر چه اختلاف

هر دو جمله متوالی آن، عددی ثابت نیست.

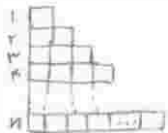
### تهیه کننده:

## گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

پ) شکل های الگوی بالا را به صورت مقابل تبدیل می کنیم.  
با دقت در تصویر مقابل سعی کنید حاصل  $a_n$  را بر حسب  $n$  بدست آورید.



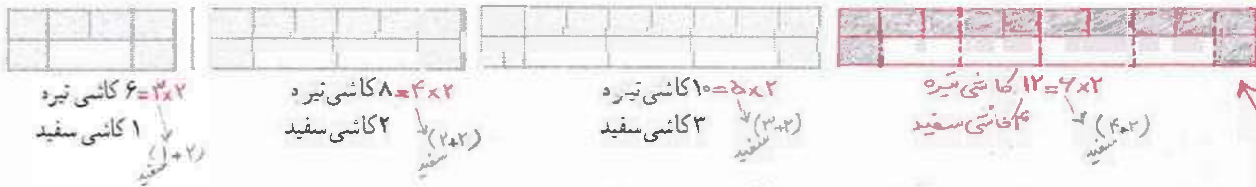
ت) به کمک مرحله قبل حاصل عبارت زیر را بنویسید.



$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

تمرین

۱) به الگوی زیر توجه کنید.



الف) شکل بعدی را رسم کنید و تعداد کاشی های تیره آن را مشخص کنید.

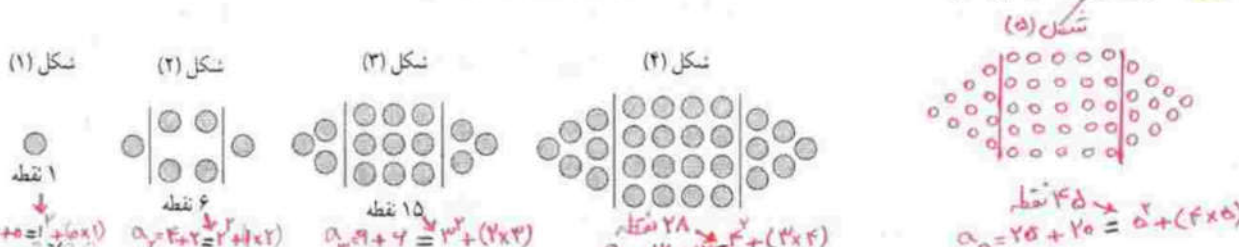
ب) تعداد کاشی های تیره در هر مرحله را به صورت یک دنباله تا جمله هفتم آن بنویسید.  $2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, \dots$

پ) اگر  $n$  تعداد کاشی های سفید و  $t_n$  تعداد کاشی های تیره باشد، مقدار  $t_n$  را بر حسب  $n$  بنویسید.

ت) برای ۱۰۰ کاشی سفید، چند کاشی تیره لازم است؟  $t_{100} = (100+2)(2) = 204$

ث) آیا در این الگو شکلی وجود دارد که شامل ۵۰ کاشی تیره باشد؟ اگر هست، تعداد کاشی های سفید آن چند است؟  $50 = 2n + 2 \Rightarrow 2n = 48 \Rightarrow n = 24$

۲) الگوی زیر را در نظر بگیرید.



الف) شکل بعدی را رسم کنید، سپس تعداد نقاط هر مرحله را به صورت یک دنباله تا جمله ششم آن بنویسید.  $1, 6, 15, 28, 45, 66, \dots$

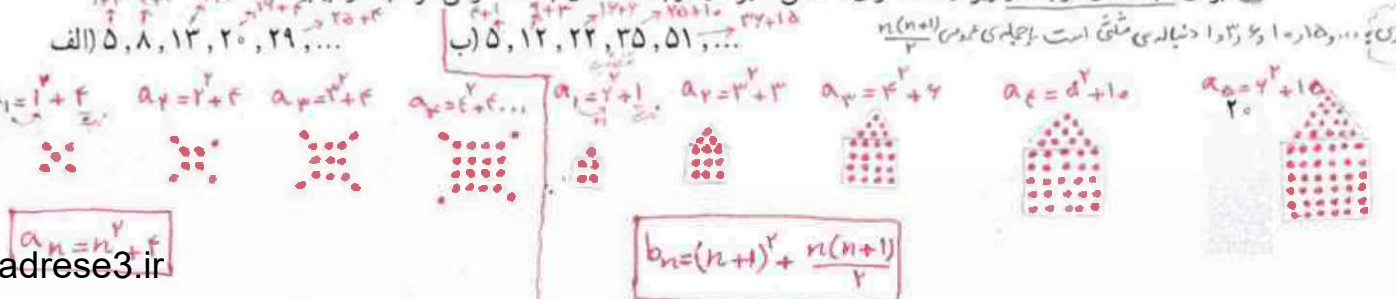
ب) جمله عمومی الگو را بیابید.  $a_n = n^2 + (n-1)n$

پ) شکل دهم در این الگو چند نقطه دارد؟  $a_{10} = 10^2 + (10-1)(10) = 190$

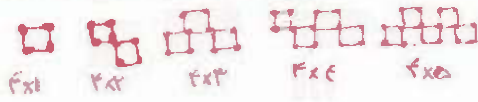
۳) جمله عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد چهار جمله اول دنباله را بنویسید و سپس به هر یک از آنها یک الگوی هندسی نظیر کنید. (جواب در لایه سمتی بعد)

- الف)  $a_n = 4n$
- ب)  $b_n = 3n + 1$
- پ)  $c_n = n^2 + 2$
- ت)  $d_n = n^2 + n$

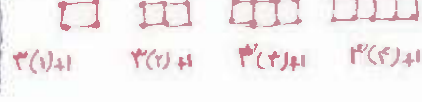
۴) برای دنباله های درجه دو زیر، یک الگوی هندسی نظیر کنید و به کمک آن جمله عمومی هر دنباله را بیابید.



الف) ... و ۲۰، ۱۶، ۱۲، ۸، ۴



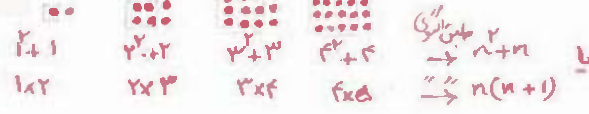
ب) ... و ۱۳، ۱۰، ۷، ۴



پ) ... و ۱۸، ۱۱، ۶، ۳



ت) ... و ۲۵، ۱۲، ۶، ۲



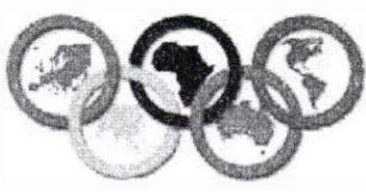
درس چهارم: دنباله‌های حسابی و هندسی

دنباله حسابی

در صفحات قبل، مثال‌هایی از الگوهای عددی خطی ارائه شد. نام دیگر این گونه الگوهای عددی «دنباله‌های حسابی» است. به عبارت دیگر:

دنباله‌ای که در آن هر جمله (به جز جمله اول) با اضافه شدن عددی ثابت به جمله قبل از خودش به دست می‌آید یک دنباله حسابی نامیده می‌شود و به آن عدد ثابت «قدر نسبت دنباله» می‌گویند.

فعالیت



۱ سال‌های برگزاری مسابقات المپیک از آغاز هزاره سوم میلادی به بعد به صورت زیر است که جملات یک دنباله حسابی‌اند.

۲۰۰۰، ۲۰۰۴، ۲۰۰۸، ۲۰۱۲، ۲۰۱۶، ۲۰۲۰، ...

الف) جمله اول و قدر نسبت این دنباله را مشخص کنید.  $t_1 = 2000$ ,  $d = 4$

ب) نهمین دوره المپیک در این هزاره در چه سالی برگزار خواهد شد؟ ۲۰۳۲

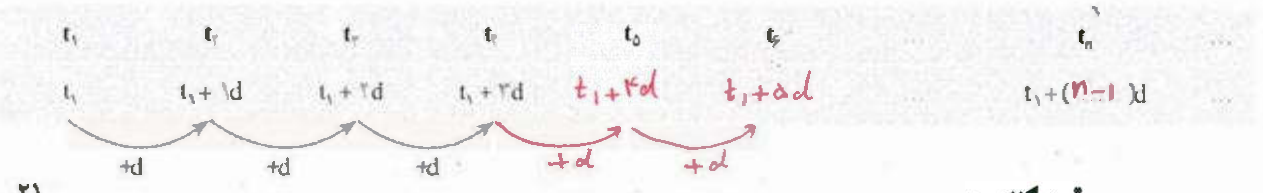
پ) با تکمیل جدول زیر، جمله عمومی این دنباله را به دست آورید.

Table with terms t1 to tn and their corresponding arithmetic expressions: t1=2000, t2=2000+(1)(4), t3=2000+2(4), t4=2000+3(4), ..., tn=2000+(n-1)(4)

ت) بیست و چهارمین دوره المپیک در هزاره سوم میلادی در چه سالی برگزار خواهد شد؟

t24 = 2000 + (24-1)(4) = 2092

۲ با تکمیل جدول زیر، سعی کنید ساختار کلی جمله عمومی یک دنباله حسابی را به دست آورید.



تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

$$b_n = b_1 + (n-1)d$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

همان طور که مشاهده شد،

جمله  $n$ ام یک دنباله حسابی با جمله اول  $t_1$  و قدر نسبت  $d$  به صورت  $t_n = t_1 + (n-1)d$  است.

### کاربردها

۱ در دنباله‌های حسابی زیر با مشخص کردن قدر نسبت، سه جمله بعدی را بنویسید و سپس جمله عمومی هر کدام را بدست آورید.

الف)  $5, 10, 15, 20, \boxed{25}, \boxed{30}, \boxed{35}, \dots, d=5, a_n = 5 + (n-1) \times 5 = \boxed{5n}$

ب)  $1, 3, 5, 7, \boxed{9}, \boxed{11}, \boxed{13}, \dots, d=2, b_n = 1 + (n-1) \times 2 = \boxed{2n-1}$

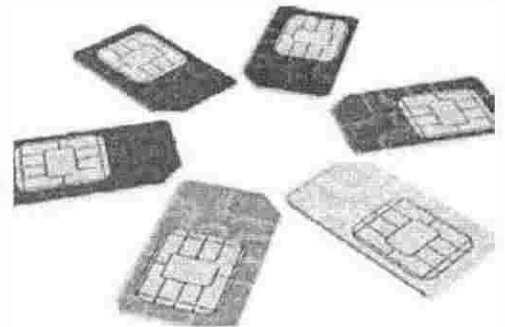
پ)  $5, 9, 13, 17, \boxed{21}, \boxed{25}, \boxed{29}, \dots, d=4, c_n = 5 + (n-1) \times 4 = \boxed{4n+1}$

ت)  $13, 7, 1, -5, \boxed{-9}, \boxed{-13}, \boxed{-17}, \dots, d=-4, d_n = 13 + (n-1) \times (-4) = \boxed{-4n+19}$

۲ A و B دو شرکت عرضه کننده سیم کارت‌های تلفن همراه با شرایط زیرند.

سیم کارت‌های شرکت B  
 هزینه ثبت ماهانه: ۳۰۰۰ تومان  
 هزینه هر دقیقه مکالمه: ۲۰ تومان

سیم کارت‌های شرکت A  
 هزینه ثبت ماهانه: ۲۰۰۰ تومان  
 هزینه هر دقیقه مکالمه: ۳۰ تومان



فرض کنیم  $a_n$  نشان دهنده هزینه کل  $n$  دقیقه مکالمه از طریق سیم کارت شرکت A و  $b_n$  هزینه مشابه برای استفاده از سیم کارت شرکت B باشند.

$$a_n = 2000 + 30n$$

$$b_n = 3000 + 20n$$

الف) مقدار  $a_n$  و  $b_n$  را بر حسب  $n$  بنویسید.

ب) جدول زیر را کامل کنید.

$n$ : زمان مکالمه ماهانه (دقیقه)	۴۰	۸۰	۱۲۰	۱۶۰
$a_n$ : هزینه سیم کارت A	۲۰۰۰	۳۲۰۰	۴۴۰۰	۵۶۰۰
$b_n$ : هزینه سیم کارت B	۲۹۰۰	۳۸۰۰	۴۷۰۰	۵۶۰۰

میراث جمله عمومی نشان به شکل خط  $t_n = an + b$  است. با این اختلاف هر دو جمله متوالی آنرا برابر هم می‌شود ثابت است.

پ) آیا  $a_n$  و  $b_n$  هر کدام می‌توانند جمله عمومی یک دنباله حسابی باشند؟ چرا؟

اگر جواب مثبت است، قدر نسبت هر یک را مشخص کنید.  
 $a_n: d = 3200 - 2000 = 1200$   
 $b_n: d = 3800 - 2900 = 900$

ت) سارا در هر ماه حدود یک ساعت و فاطمه ماهانه تقریباً ۱۵۰ دقیقه با تلفن همراه مکالمه می‌کنند. به هر یک از آنها کدام سیم کارت را پیشنهاد می‌کنید؟ چرا؟

سیم کارت A سارا در نظر می‌گیریم  $\rightarrow$

$$a_{70} = 2000 + 30(70) = 4100$$

$$b_{70} = 3000 + 20(70) = 4400$$

سیم کارت B فاطمه در نظر می‌گیریم  $\rightarrow$

$$a_{150} = 2000 + 30(150) = 6500$$

$$b_{150} = 3000 + 20(150) = 6000$$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

درس ریاضی پایه دهم

مثال

در دنباله حسابی زیر جمله شانزدهم را به دست آورید.  $4, 11, 18, 25, \dots$   
حل: آر تین و آرکان این مثل را به روش های زیر حل کرده اند. شما کدام روش را می پسندید؟



سوزن دوزی - سیستان و بلوچستان

آر تین: از جمله عمومی دنباله حسابی استفاده می کنیم:

$$t_n = t_1 + (n-1)d$$

$$t_{16} = t_1 + 15d$$

$$= 4 + (15)(7)$$

$$= 109$$

از این روش زودتر جواب بدست می آید ✓

آرکان: یک الگوی خطی با قدرنسبت ۷ داریم. پس

$$t_n = 7n + b$$

$$t_1 = 7(1) + b$$

$$4 = 7 + b \Rightarrow b = -3$$

جمله عمومی

$$t_n = 7n - 3$$

$$t_{16} = 7(16) - 3$$

$$t_{16} = 109$$

کارد در کلاس

$t_1, t_2, t_3, t_4, \dots$   
 $4, 11, 18, 25, \dots$

الف) یک دنباله حسابی با قدرنسبت مثبت مثل بزنید که جمله چهارم آن ۱۰ باشد.  
ب) یک دنباله حسابی با قدرنسبت منفی مثل بزنید که جمله چهارم آن ۱۰ باشد.  
پ) دنباله ای حسابی مثل بزنید که تنها سه جمله مثبت داشته باشد و سایر جملات آن منفی باشند.

۲ الف) بین ۱۸ و ۶۲ سه عدد را چنان قرار دهید که پنج عدد حاصل تشکیل دنباله حسابی بدهند. در این حالت می گوئیم بین ۱۸ و ۶۲ سه واسطه حسابی درج کردیم.  
حل: با فرض اینکه ۱۸ جمله اول باشد، قدرنسبت را به دست آورید و جدول را کامل کنید.

$$\begin{cases} t_1 = 18 \\ t_5 = 62 \Rightarrow t_1 + 4d = 62 \Rightarrow d = 11 \end{cases}$$

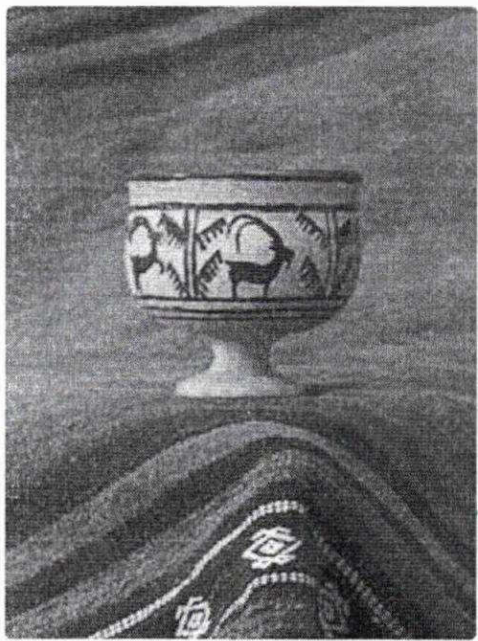
$d = 62 - 18 = 44$

$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$
۱۸	۲۹	۴۰	۵۱	۶۲

ب) بین ۲۰ و ۸۰ به تعداد مشخص شده در هر مورد واسطه حسابی درج کنید.

۱۰ واسطه:  $t_1 = 20, t_{11} = 80 \Rightarrow 20 + 10d = 80 \Rightarrow d = 6$

۲۰ واسطه:  $t_1 = 20, t_{21} = 80 \Rightarrow 20 + 20d = 80 \Rightarrow d = 3$



بویانمایی روی سفال

۲۰ واسطه:  $t_1 = 20, t_{21} = 80 \Rightarrow 20 + 20d = 80 \Rightarrow d = 3$

۳۰ واسطه:  $t_1 = 20, t_{31} = 80 \Rightarrow 20 + 30d = 80 \Rightarrow d = 2$

۴۰ واسطه:  $t_1 = 20, t_{41} = 80 \Rightarrow 20 + 40d = 80 \Rightarrow d = 1.5$

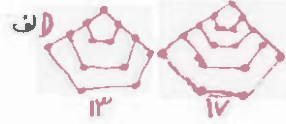
تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان



دنباله حسابی  $1, 5, 9, 13, 17, \dots$  دنباله حسابی

دنباله حسابی



ب)  $t_n = t_1 + (n-1)d \rightarrow t_n = 1 + (n-1)4 \rightarrow t_n = 4n - 3$   
 پ)  $2197 = 4n - 3 \rightarrow 400 = 4n \rightarrow n = 100$

**تمرین**

از بین دنباله‌های زیر، دنباله‌های حسابی را مشخص کنید و در هر یک از آنها با تعیین قدرنسبت، جمله بیست و یکم را بیابید.

- الف)  $3, 10, 17, 24, \dots \rightarrow t_1=3, d=7$
- ب)  $1, 2, 4, 8, \dots$
- ج)  $10, 7, 4, 1, \dots \rightarrow t_1=10, d=-3$
- د)  $\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1, \dots \rightarrow t_1=\frac{2}{5}, d=\frac{1}{5}$
- ه)  $2, 2, 2, 2, \dots \rightarrow t_1=2, d=0$

$t_n = t_1 + (n-1)d$   
 الف)  $t_n = 3 + (n-1)7 \rightarrow t_{21} = 3 + 20 \times 7 = 143$   
 ب)  $a_n = \sqrt{3} + (n-1)\sqrt{3} \rightarrow a_{21} = \sqrt{3} + 20\sqrt{3} = 21\sqrt{3}$   
 ج)  $b_n = 10 + (n-1)(-3) \rightarrow b_{21} = 10 - 60 = -50$   
 د)  $c_n = \frac{2}{5} + (n-1)(\frac{1}{5}) \rightarrow c_{21} = \frac{2}{5} + \frac{20}{5} = \frac{22}{5}$   
 ه)  $t_n = 2 + (n-1)(0) \rightarrow t_{21} = 2 + 0 = 2$

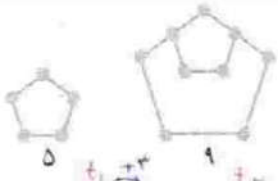
در یک دنباله حسابی، جملات سوم و هفتم به ترتیب ۲۰ و ۵۶ است. دنباله را مشخص کنید؛ یعنی با به دست آوردن جمله اول و قدرنسبت، جملات دنباله را بنویسید.

$t_3 = t_1 + 2d = 20$   
 $t_7 = t_1 + 6d = 56$   
 $t_1 + 2(6) = 20 \rightarrow t_1 = 2$   
 $d = 9$

در یک دنباله حسابی، مجموع سه جمله اول و مجموع سه جمله بعدی آن ۳۹ است. دنباله را مشخص کنید.

$t_1 + t_2 + t_3 = 3$   
 $t_4 + t_5 + t_6 = 39$   
 $3t_1 + 3(3d) = 39 \rightarrow 3t_1 + 9d = 39 \rightarrow t_1 + 3d = 13$   
 $d = 4$

الف) دو جمله بعدی الگوی مقابل را با رسم شکل بیابید و نوع دنباله را مشخص کنید.  
 ب) جمله عمومی آن را مشخص کنید.  
 پ) جمله چندم این دنباله ۲۹۷ است؟



دنباله :  $-3, 1, 5, 9, 13, 17, 21, \dots$

قدیمی‌ترین کتاب ریاضی جهان تلخ تقریبی پاپیروس رابند (یا احمس) سل ۱۶۵۰ قبل از میلاد است. این پاپیروس یک متن ریاضی می‌باشد که تا حدودی ماهیت یک کتاب راهنما را دارد و شامل ۸۵ مسئله به خط هیرواتی است. احمس کتاب، آن را از روی یک اثر قدیمی‌تر نسخه‌برداری کرده است. این پاپیروس در سل ۱۸۵۸ میلادی به وسیله مصرشناس اسکاتلندی، هنری رابند، در مصر خریداری شد و سپس به موزه بریتانیا منتقل شد. پاپیروس‌های رابند (۱۶۵۰ ق.م) و مسکو (۱۸۵۰ ق.م) از منابع اصلی اطلاعات ما درباره ریاضیات مصر باستان هستند. پاپیروس رابند در سل ۱۹۲۷ منتشر شد. این پاپیروس حدود ۵/۵ متر طول و ۳۰ سانتی‌متر عرض دارد.

- ۱- Ahmes
- ۲- A. Henry Rhind



بخشی از پاپیروس رابند

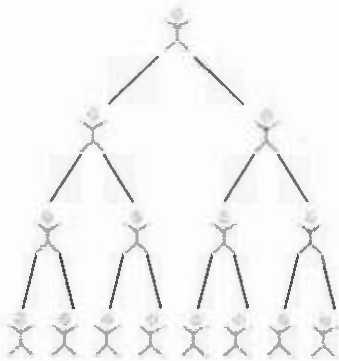
- الف) واسطه حسابی بین ۵ و ۱۱ چه عددی است؟  
 $t_2 = t_1 + d = 11$   
 $t_1 = 5$   
 $d = 6$
- ب) واسطه حسابی بین ۲ و ۳۰ چه عددی است؟  
 $t_2 = 30$   
 $t_1 = 2$   
 $d = 14$
- پ) از دو قسمت قبل چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟  
 $2b = a + c$

مسئله زیر در پاپیروس رابند آمده است. آن را حل کنید.  
 ۱۰۰۱۱ قرص نان را بین ۵ مرد چنان تقسیم کنید که سهم‌های دریافت شده دنباله حسابی تشکیل دهند و یک سوم مجموع سه سهم بزرگ‌تر، مساوی مجموع دو سهم کوچک‌تر باشد.

$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 = 100$   
 $t_1 + t_2 = 100 - (t_3 + t_4 + t_5)$   
 $t_1 + t_2 = 100 - (t_1 + 2d + t_1 + 4d + t_1 + 6d)$   
 $2t_1 + 2d = 100 - (3t_1 + 12d)$   
 $5t_1 + 10d = 100$   
 $t_1 + 2d = 20$

$5t_1 + 10d = 100$   
 $-5t_1 + 10d = 0$   
 $20d = 100 \rightarrow d = 5$   
 $-t_1 + 2d = 0 \rightarrow t_1 = 10$

دنباله :  $10, 15, 20, 25, 30$



### دنباله هندسی

علی به بیماری آنفولانزا مبتلا شده است. روز شنبه چند تن از دوستانش بدون آنکه ماسک زده باشند، به عیادت او آمدند. در این زمان ویروس آنفولانزا از راه تنفس وارد بدن امید و محسن می شود؛ چرا که آنها روز یکشنبه مبتلا به این بیماری شدند. اگر پیشگیری انجام نشود و موارد بهداشتی مراعات نگردد، پیش بینی می شود که انتشار ویروس تا مدتی با همین الگو ادامه یابد؛ یعنی امید و محسن در روز اول بیماری خود، هر کدام ویروس را به ۲ نفر دیگر منتقل کنند؛ به طوری که روز دوشنبه ۴ نفر جدید از طریق آنها مبتلا شوند و این روند ادامه پیدا کند.

### فعالیت

۱ جنول مقابل را کامل کنید و  $t_n$  را بیابید.

۲ در روز دهم چند نفر جدید مبتلا می شوند؟  $n=10$

۳ در روز یازدهم چند شخص جدید به این بیماری مبتلا می شوند؟  $n=11$

۴ در روز چندم تعداد افراد جدیدی که به بیماری آنفولانزا مبتلا می شوند برابر ۱۶۳۸۴ نفر می شود.  $n=?$

در مثل بالا می توانیم تعداد مبتلایان جدید هر روز را به صورت دنباله زیر بنویسیم:

$$2, 4, 8, 16, 32, \dots$$

این دنباله یک دنباله حسابی نیست؛ چرا که تفاضل جملات متوالی آن ثابت نیست، بلکه نسبت تقسیم هر دو جمله متوالی آن برابر عددی ثابت است.

$$\dots = \frac{32}{16} = \frac{16}{8} = \frac{8}{4} = \frac{4}{2} = 2$$

اینگونه دنباله ها را دنباله های هندسی می نامیم. یعنی:

$t_n$ : تعداد افراد جدیدی که در  $n$  روز

روز  $n$  ام مبتلا می شوند

۱ (امید و محسن)  $2$

۲  $2 \times 2 = 2^2$

۳  $4 \times 2 = 2^3$

۴  $8 \times 2 = 16 = 2^4$

۵  $16 \times 2 = 32 = 2^5$

۶  $32 \times 2 = 64 = 2^6$

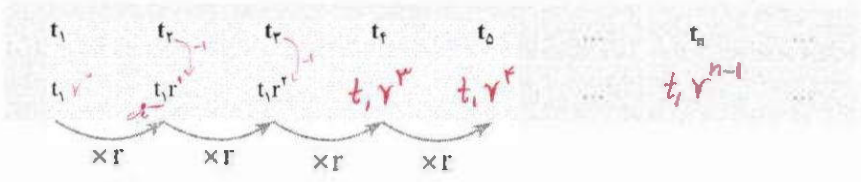
...

$t_n = 2^n$

دنباله هندسی، دنباله ای است که در آن هر جمله (به جز جمله اول) از ضرب جمله قبل از خودش در عددی ثابت به دست می آید. این عدد ثابت را قدرنسبت دنباله می نامیم. (غیر صفر)

### فعالیت

در حالت کلی در یک دنباله هندسی، اگر جمله اول  $t_1$  و قدرنسبت  $r$  باشد، جملات آن به شکل زیر خواهند بود. جنول را تکمیل کنید.



تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

با دقت در الگوی به کار رفته در جملات بالا دیده می شود که :

جمله  $t_n$ ام دنباله هندسی به صورت  $t_n = 2 \cdot 3^{n-1}$  است که در آن  $t_1$  جمله اول و  $r$  قدرنسبت می باشد.

تکاد در کلاس

۱ نرگس و نگار برای محاسبه هفتمین جمله دنباله هندسی  $9, 3, 1, \dots$  روش های مقابل را به کار برده اند.

نرگس

کدام یک از آنها این مثال را درست حل کرده اند؟ توضیح دهید. برای محاسبه قدرنسبت دنباله هندسی باید هر جمله را تقسیم بر جمله قبلیش کرد.

✓ نگار $r = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ $t_7 = 9 \left(\frac{1}{3}\right)^{7-1}$ $= \frac{1}{81}$	✗ نرگس $r = \frac{9}{3} = 3$ $t_7 = 9(3)^{7-1}$ $= 6561$
--	--

۲ در دنباله های هندسی زیر، قدرنسبت را مشخص کنید و دو جمله بعدی را بنویسید. سپس جمله عمومی هر دنباله را به دست آورید.

الف)  $a_1 = 2, a_2 = 6, a_3 = 18, a_4 = 54, a_5 = 162, \dots, a_n = 2 \times 3^{n-1}$

ب)  $b_1 = 5, b_2 = 10, b_3 = 20, b_4 = 40, b_5 = 80, b_6 = 160, \dots, b_n = 5 \times 2^{n-1}$

ج)  $c_1 = 6, c_2 = -60, c_3 = 600, c_4 = -6000, c_5 = 60000, c_6 = -600000, \dots, c_n = 6 \times (-10)^{n-1}$

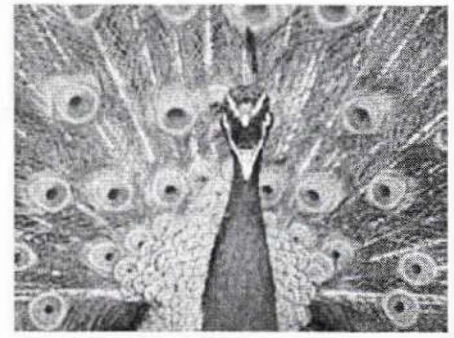
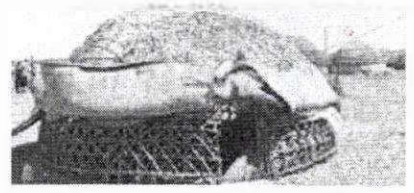
د)  $d_1 = 4, d_2 = 2, d_3 = 1, d_4 = \frac{1}{2}, d_5 = \frac{1}{4}, d_6 = \frac{1}{8}, \dots, d_n = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

۳ الف) اگر بین ۳ و ۴۸، عدد ۱۲ را قرار دهیم، سه عدد حاصل تشکیل دنباله هندسی می دهند. در این حالت می گوئیم ۱۲ واسطه هندسی بین ۳ و ۴۸ است. برای این کار به جز

۱۲ چه عدد دیگری را می توان در نظر گرفت؟ هیچ عدد دیگری نمی شود در نظر گرفت.

$$\begin{cases} t_1 = 3 \\ t_3 = 48 \Rightarrow t_1 r^2 = 48 \Rightarrow r^2 = 16 \Rightarrow r = 4 \end{cases}$$

3    12    48



ب) بین ۳ و ۴۸ سه واسطه هندسی درج کنید. آیا جواب یکتاست؟ خیر

$t_1 = 3, t_5 = 48 \Rightarrow t_1 r^4 = 48 \Rightarrow r^4 = 16 \Rightarrow r = \pm 2$   
 $t_1 = 3, t_3 = 48 \Rightarrow t_1 r^2 = 48 \Rightarrow r^2 = 16 \Rightarrow r = \pm 4$   
 $t_1 = 3, t_5 = 48 \Rightarrow t_1 r^4 = 48 \Rightarrow r^4 = 16 \Rightarrow r = \pm 2$   
 $t_1 = 3, t_3 = 48 \Rightarrow t_1 r^2 = 48 \Rightarrow r^2 = 16 \Rightarrow r = \pm 4$

ب) جاهای خالی را طوری پر کنید که در هر مورد یک دنباله هندسی حاصل شود.

$t_1 = 4, t_4 = 4000 \Rightarrow t_1 r^3 = 4000 \Rightarrow r^3 = 1000 \Rightarrow r = 10$   
 $t_1 = 10, t_4 = 4000 \Rightarrow t_1 r^3 = 4000 \Rightarrow r^3 = 400 \Rightarrow r = 10$

$t_1 = 4, t_4 = 8000 \Rightarrow t_1 r^3 = 8000 \Rightarrow r^3 = 2000 \Rightarrow r = 10$   
 $t_1 = 4, t_4 = 8000 \Rightarrow t_1 r^3 = 8000 \Rightarrow r^3 = 2000 \Rightarrow r = 10$   
 $t_1 = 4, t_4 = 8000 \Rightarrow t_1 r^3 = 8000 \Rightarrow r^3 = 2000 \Rightarrow r = 10$   
 $t_1 = 4, t_4 = 8000 \Rightarrow t_1 r^3 = 8000 \Rightarrow r^3 = 2000 \Rightarrow r = 10$

$1000 \times (\frac{1}{10})^2$  و  $1000 \times (\frac{1}{10})^3$  و  $1000 \times (\frac{1}{10})^4$  و  $1000 \times (\frac{1}{10})^5$  و  $1000 \times (\frac{1}{10})^6$  و  $1000 \times (\frac{1}{10})^7$  و  $1000 \times (\frac{1}{10})^8$  و  $1000 \times (\frac{1}{10})^9$  و  $1000 \times (\frac{1}{10})^{10}$

$1000$  و  $100$  و  $10$  و  $1$  و  $0.1$  و  $0.01$  و  $0.001$  و  $0.0001$  و  $0.00001$  و  $0.000001$  و  $0.0000001$  و  $0.00000001$  و  $0.000000001$



۴ یک کیلوگرمی هزار شش روز هر روز یک پیمون برون شود را از دست می‌دهد.  
 پس از گذشت ۳۰ روز کدام گرمه دست است؟  $\frac{1}{10}$  از دست برده می‌شود.  
 الف) چیزی از آن باقی نمی‌ماند.  
 ب) حدود  $\frac{1}{10}$  آن باقی می‌ماند.  
 ج) تقریباً نصف آن آب می‌شود.  
 د) حدود  $\frac{2}{3}$  آن باقی می‌ماند.

**تمرین**

از بین موارد زرد، دنباله‌های هندسی را مشخص کنید و فهرست آنها را بنویسید.

$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, \dots$  →  $2^n$   
 $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, \dots$  →  $n$   
 $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, \dots$  →  $n$   
 $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, \dots$  →  $n$   
 $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, \dots$  →  $n$

جدد دنباله هندسی با فهرست  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}, \frac{1}{512}, \frac{1}{1024}, \dots$  می‌توان ساخت دو مورد را بنویسید.

درسی با نادرستی حملات زیر را بررسی کنید. در صورت لزوم بودن توضیح دهید و در صورت نادرستی بودن مثال بزنید.  
 الف) هر دنباله، یا حسابی است یا هندسی.  
 ب) دنباله‌ای وجود ندارد که هم حسابی باشد و هم هندسی.

علی دوجرهای را با قیمت ۵۰۰ هزار تومان خرید. فرض کنید قیمت دوجر هفتاد درصد در هر سال ۲۰ درصد نسبت به سال قبل از خودی کاهش یابد.  $500 \times (\frac{70}{100})^n$  قیمت دوجر در سال  $n$  را بنویسید.  
 الف) اگر او بعد از ۳ سال قصد فروش دوجر خاستن را داشته باشد، به چه قیمتی می‌تواند آن را بفروشد؟  
 ب) قیمت دوجر چه بعد از گذشت ۱۰ سال از چه رابطه‌ای به دست می‌آید؟

حاصل ضرب بیست جمله اول دنباله هندسی مقادیر  $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192, 16384, 32768, 65536, 131072, 262144, 524288, 1048576$  را بنویسید.

بازی آمار منتشر شده از جلیله برتسکی قانونی کشور، آمار تلفات جانانی از عدد ۲۷۷۵۱ تا ۱۳۸۲ به عدد ۱۶۵۸۲ طرح می‌شود.  
 سال ۱۳۹۴ کاهنی یافته است که نشان دهنده حدود ۵ درصد کاهنی سالانه در این دهه است. اگر آمار حوادث آلودگی در کشور با همین سرعت کاهش یابد،  $16582 \times (\frac{95}{100})^n$  آمار آلودگی در کشور در سال  $n$  را بنویسید.  
 الف) پیش‌بینی می‌شود در هر یک از سال‌های منتهی به سال ۱۴۰۰ چند نفر از هموطن‌های ما جان خود را در حوادث آلودگی از دست بدهند؟ نتایج را در جدول زیر ثبت کنید.

سال	۱۳۹۰	۱۳۹۱	۱۳۹۲	۱۳۹۳	۱۳۹۴	۱۳۹۵	۱۳۹۶	۱۳۹۷	۱۳۹۸	۱۳۹۹	۱۴۰۰
تعداد تلفات مورد انتظار	۱۶۵۸۲	۱۵۷۵۲	۱۴۹۲۲	۱۴۰۹۲	۱۳۲۶۲	۱۲۴۳۲	۱۱۶۰۲	۱۰۷۷۲	۹۹۴۲	۹۱۱۲	۸۲۸۲

ب) اعداد حاصل، چگونگی دنباله‌ای تشکیل می‌دهند.  $16582 \times (\frac{95}{100})^n$   
 $t_n = 16582 \times (\frac{95}{100})^n$   
 $t_{n+1} = 16582 \times (\frac{95}{100})^{n+1}$   
 $\frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{16582 \times (\frac{95}{100})^{n+1}}{16582 \times (\frac{95}{100})^n} = \frac{95}{100}$   
 $\frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{19}{20}$   
 $t_{n+1} = \frac{19}{20} t_n$   
 $t_{n+1} = \frac{19}{20} \times 16582 \times (\frac{95}{100})^n$   
 $t_{n+1} = 16582 \times (\frac{95}{100})^{n+1}$