

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

حل تمرین ریاضی (۱)

رشته‌های ریاضی و فیزیک – علوم تجربی

پایه دهم

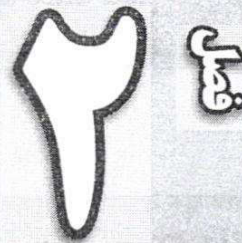
متوسطه دوم

وبسایت مدرسه سوم

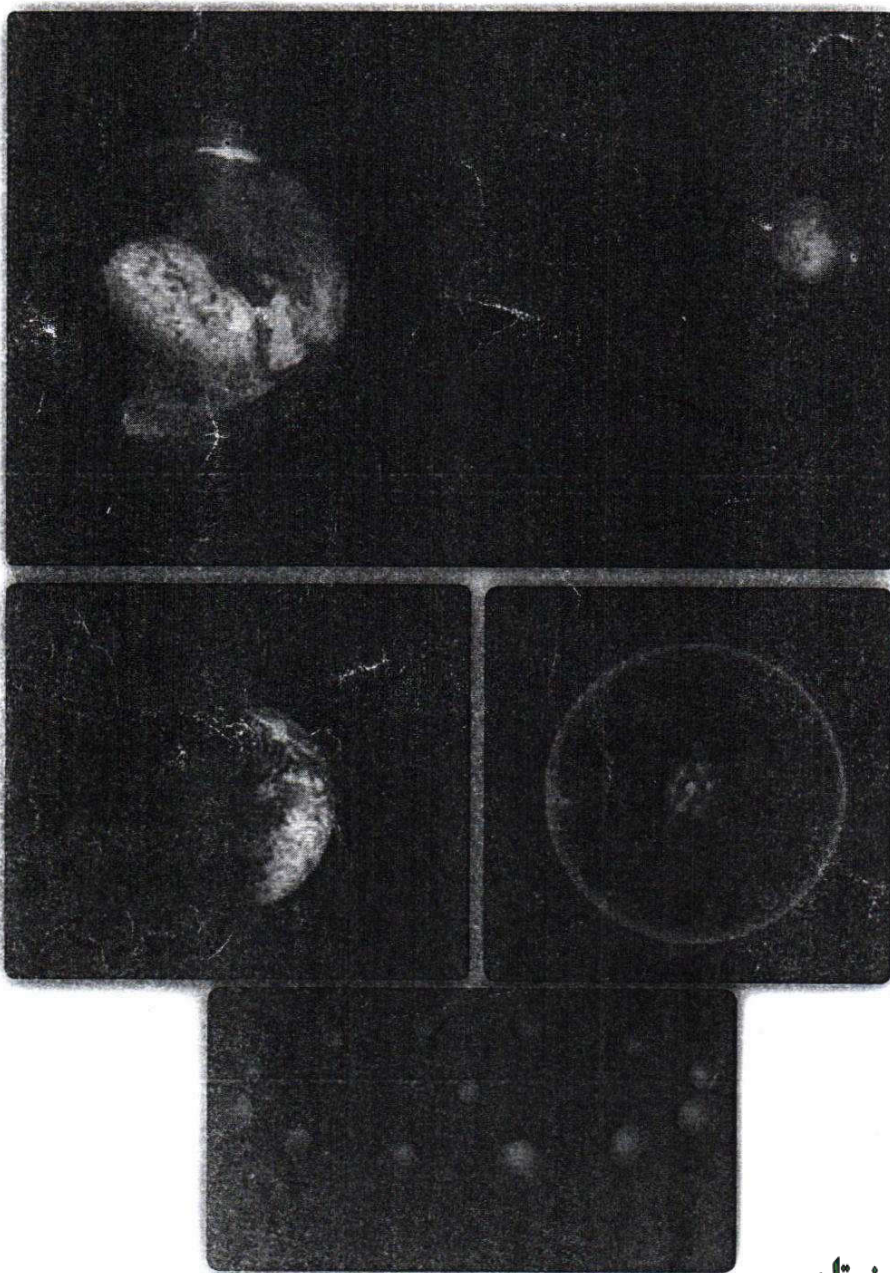
مثلثات

السَّمْسُ وَالْقَمَرُ بِحُسْبَانٍ (رحمان : ۵)

خورشید و ماه برابر حساب (منظمی در چرخش و گردش) هستند.



زمین هم به دور خودش و هم به دور خورشید می چرخد. مسیر حرکت زمین به دور خورشید بیضی شکل است که حاصل آن پیدایش فصل های مختلف است. روز و شب نیز حاصل چرخش زمین به دور خودش است. این چرخش را حرکت وضعی زمین می نامیم که در آن چرخش زمین به سمت شرق است. ستاره قطبی، ستاره ای است که موقعیت محلش نسبت به ناظر ساکن روی زمین تغییر نمی کند. اگر از سمت ستاره قطبی به زمین نگاه کنیم، زمین خلاف جهت عقربه های ساعت به دور خود، دوران می کند.



درسی اول نسبت های مثلثاتی

درسی دوم دایره مثلثاتی

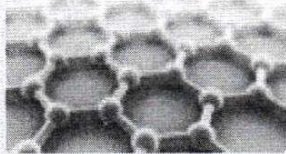
درسی سوم روابط بین نسبت های مثلثاتی

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه ، استان خوزستان



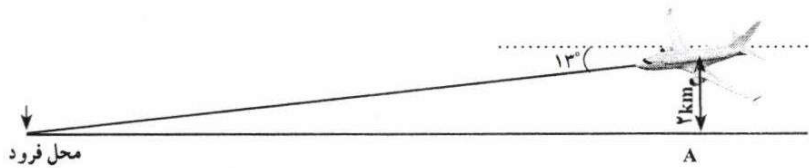
برای اینکه اتومبیل ها در بیخ جاده ها بتوانند بدون خطر انحراف، حرکت کنند، در جاده شیب عرضی ایجاد می کنند، یعنی آن را طوری می سازند که قسمت بیرونی جاده نسبت به قسمت درونی، مرتفع تر باشد.



در صفحات گرافن، هر اتم کربن با سه اتم کربن دیگر پیوند دارد که زوایای بین این پیوندها 120° درجه است. در آینده ای نه چندان دور، بهترین میکروفن های جهان با استفاده از گرافن ساخته می شوند. این میکروفن ها، قابلیت ردیابی امواج صوتی فراتر از دامنه شدت شنوایی انسان را دارند.

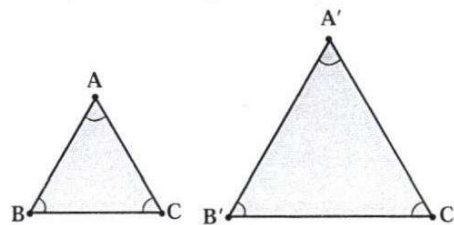
درس اول: نسبت های مثلثاتی

مثلثات شاخه ای از ریاضیات است که به بررسی روابط بین زوایا و اضلاع یک مثلث می پردازد. یکی از اهداف این علم، اندازه گیری فاصله ها به صورت غیر مستقیم است. مثلثات در علوم مهندسی، فیزیک، نقشه برداری، دریانوردی، نجوم و غیره کاربرد دارد. به عنوان مثال، فرض کنید یک هواپیما در ارتفاع ۲ کیلومتری از سطح زمین در حال فرود آمدن است.



اگر زاویه هواپیما با افق 13° باشد، می خواهیم محل دقیق فرود هواپیما را بدانیم. این مسئله و مسائلی نظیر این با استفاده از روابط مثلثاتی حل می شوند.

برای معرفی مفهوم مثلثات، به مفهوم تشابه نیاز داریم. در پایه نهم با این مفهوم آشنا شدید و دیدید که دو مثلث با هم متشابه اند، هرگاه زوایای نظیر در آنها برابر و نسبت اضلاع متناظر نیز با هم برابر باشند.

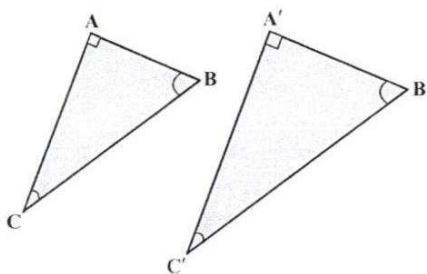


یعنی اگر $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ، آنگاه داریم: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$ و $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$, $\hat{C} = \hat{C}'$ در هندسه ثابت می شود:

تجرب کنید

هرگاه دو زاویه از مثلثی، با دو زاویه از مثلثی دیگر برابر باشند، آن دو مثلث، متشابه اند.

به عنوان یک نتیجه از مطلب بالا می توان دید:



اگر $\triangle ABC$ و $\triangle A'B'C'$ در شکل مقابل قائم الزاویه باشند و داشته باشیم $\hat{C} = \hat{C}'$ ، آنگاه

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

۱ در مثلث‌های قائم‌الزاویه ABC و A'B'C'، $\hat{A} = \hat{A}'$. جاهای خالی را کامل کنید.

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Rightarrow \frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$$

۲ از تساوی $\frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'}$ ، می‌توان نتیجه گرفت $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$ (چرا؟). با توجه به این نکته، جاهای خالی را کامل کنید:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} \text{ و } \frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{A'C'}$$

نتیجه: اگر زاویه A از مثلث قائم‌الزاویه ABC با زاویه A' از مثلث قائم‌الزاویه A'B'C' (مطابق شکل بالا) برابر باشد، داریم:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{A'C'} \text{ و } \frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} \text{ و } \frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$$

$$\frac{AC}{AF} = \frac{AB}{AE} = \frac{BC}{EF}$$

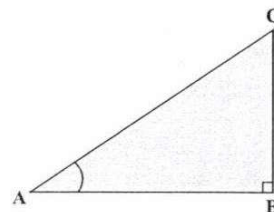
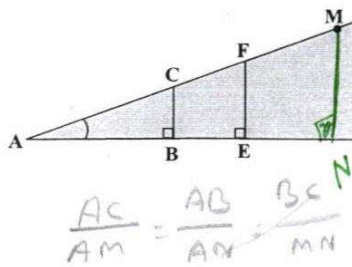
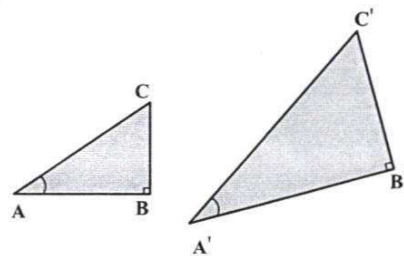
فعالیت

۱ در شکل سمت راست، درستی تساوی $\frac{BC}{AB} = \frac{EF}{AE}$ را بررسی کنید.

$$\triangle ABC \sim \triangle AFE \rightarrow \frac{AC}{AF} = \frac{AB}{AE} = \frac{BC}{EF}$$

۲ نقطه دیگری مثل M را در امتداد AC در نظر بگیرید و از آن نقطه، عمودی بر ضلع دیگر زاویه A رسم کنید و پای عمود را N بنامید. اکنون جاهای خالی را کامل کنید:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{MN}{AN} = \frac{EF}{AE}$$

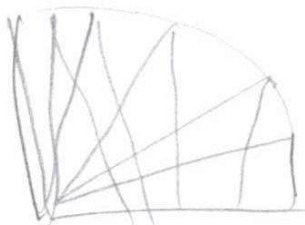


همان‌طور که در «کار در کلاس» بالا دیدیم، در مثلث قائم‌الزاویه ABC برای زاویه معین و حاده A، نسبت طول ضلع مقابل زاویه A، به طول ضلع مجاور آن همواره مقداری ثابت است. این نسبت را تانژانت زاویه A می‌نامیم و آن را با $\tan A$ نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر، در مثلث قائم‌الزاویه ABC، داریم:

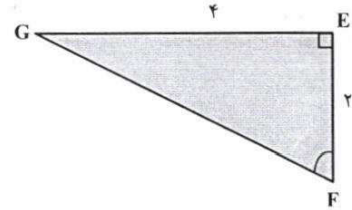
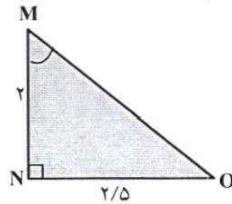
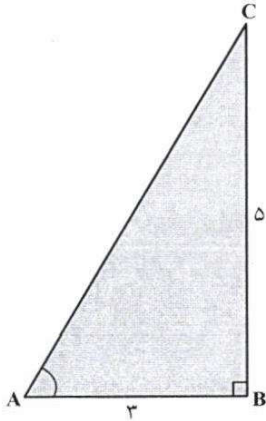
$$\tan A = \frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویه A}}{\text{طول ضلع مجاور به زاویه A}} = \frac{BC}{AB}$$

عکس تانژانت زاویه A را کتانژانت می‌نامیم و آن را با $\cot A$ نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر، در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم:

$$\cot A = \frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویه A}}{\text{طول ضلع مقابل به زاویه A}} = \frac{AB}{BC}$$



۱ در هر یک از شکل های زیر، جاهای خالی را کامل کنید.



$$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{5}{3}$$

$$\cot M = \frac{MN}{NO} = \frac{2}{2/5}$$

$$\tan F = \frac{EF}{GE} = \frac{2}{4}$$

$$\cot A = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5}$$

$$\tan M = \frac{NO}{MN} = \frac{2/5}{2}$$

$$\cot F = \frac{GE}{EF} = \frac{4}{2}$$

۲ مثلث متساوی الاضلاع ABC با اضلاعی به طول ۲ واحد را در نظر بگیرید.

الف) محل برخورد نیمساز زاویه A با پاره خط BC را M بنامید. با توجه به خواص مثلث متساوی الساقین، AM، ضلع BC است. بنابراین

$$BM = MC = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} AB = 1$$

ب) با استفاده از رابطه فیثاغورس، طول AM و حاصل کسرهایی زیر را به دست آورید.

$$\tan 30^\circ = \frac{BM}{AM} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \tan 60^\circ = \frac{AM}{BM} = \frac{\sqrt{3}}{1}$$

$$2^2 = 1^2 + AM^2 \Rightarrow \sqrt{3} = AM$$

پ) با استفاده از یک مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین، تنازنت و کتنازنت زاویه 45° را پیدا کنید.

$$\tan 45^\circ = \frac{AB}{AC} = 1$$

$$\cot 45^\circ = \frac{AC}{AB} = 1$$

در هر مثلث قائم الزاویه ABC، نسبت طول ضلع مقابل زاویه حاده A به طول وتر، همواره مقداری ثابت است که آن را سینوس زاویه A می نامیم و با sin A نشان می دهیم. به عبارت دیگر

$$\sin A = \frac{BC}{AC}$$

همچنین نسبت طول ضلع مجاور زاویه حاده A به طول وتر نیز مقداری ثابت است که آن را

کسینوس زاویه A می نامیم و آن را با cos A نشان می دهیم. به عبارت دیگر

$$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{\frac{BC}{AC}}{\frac{AB}{AC}} = \frac{\sin A}{\cos A}$$

این رو $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$ به طور مشابه، می توان دید $\cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$

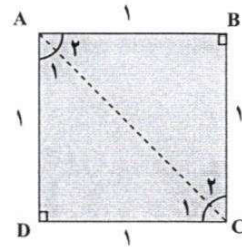
تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

در یک مثلث قائم الزاویه، نسبت های سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت را نسبت های مثلثاتی می نامیم.

مثال

خانم جلالی از دانش آموزان خواست تا نسبت های مثلثاتی زاویه 45° را حساب کنند. او ابتدا یک مربع با اضلاعی به طول ۱ واحد رسم کرد و از دانش آموزان خواست تا قطر AC را رسم کرده و سپس طول آن را حساب کنند.



فریبا: با توجه به اینکه مثلث ADC قائم الزاویه است، داریم $(AD)^2 + (DC)^2 = (AC)^2$. در نتیجه $(AC)^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ و از این رو $AC = \sqrt{2}$.

معلم: با توجه به اینکه مثلث ADC متساوی الساقین است، از این رو $\hat{A}_1 = \hat{C}_1 = 45^\circ$.

میبینا: طبق تعریف سینوس، $\sin A_1 = \sin 45^\circ = \frac{DC}{\text{وتر}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

سبا: من هم می توانم با توجه به روابط بالا کسینوس 45° را پیدا کنم.

$\cos A_1 = \cos 45^\circ = \frac{AD}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

مریم: اکنون در مثلث قائم الزاویه ADC، طبق تعریف داریم

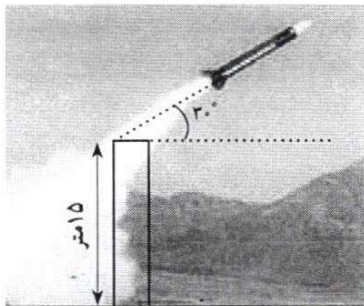
$\tan A_1 = \tan 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$ و $\cot A_1 = \cot 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$.

نوار در کلاس

به کمک شکل فعالیت قبل، با پیدا کردن نسبت های مثلثاتی زاویه های 30° و 60° ، جدول زیر را کامل کنید (در صورت لزوم، کسرها را گویا کنید).

مقدار	30°	45°	60°
sinA	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosA	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
tanA	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
cotA	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

مثال



یک موشک در ارتفاع ۱۵ متری از سطح زمین و با زاویه ۳۰° پرتاب می‌شود. می‌خواهیم بدانیم پس از طی ۲۰۰ متر با همین زاویه، موشک به چه ارتفاعی از سطح زمین می‌رسد؟
 حل: ابتدا یک مدل ریاضی برای حل این مسئله می‌سازیم. با توجه به شکل زیر، به سادگی می‌توان دید، ارتفاع موشک از سطح زمین برابر است با:

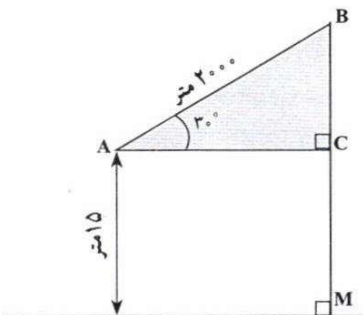
$$BC + MC = BC + \dots 15.$$

بنابراین کافی است طول BC را پیدا کنیم. می‌دانیم $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ پس در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم:

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = \frac{BC}{60} \Rightarrow BC = 30$$

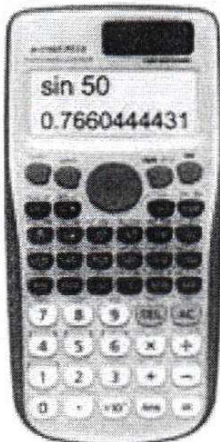
و از این رو

$$\text{ارتفاع موشک} = 30 + 15 = 45$$



فعالیت

۱ یک زاویه ۵° رسم کنید. با تشکیل یک مثلث قائم‌الزاویه و اندازه‌گیری طول‌های موردنظر با یک خط‌کش مدرج، نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۵° را به صورت تقریبی حساب کنید. سپس با ماشین حساب، مقادیر واقعی را به دست آورید و با مقادیر قبل مقایسه کنید.



۲ می‌خواهیم مساحت مثلث ABC در شکل زیر را پیدا کنیم. می‌دانیم:

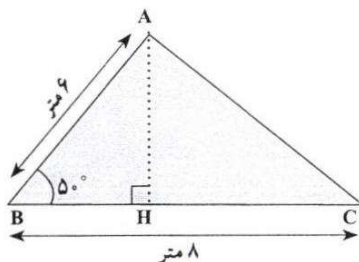
$$\text{مساحت مثلث ABC} = \frac{1}{2} \times \text{قاعده} \times \text{ارتفاع}$$

(الف) با توجه به اینکه $\sin 5^\circ = 0.087$ داریم:

$$\sin 5^\circ = \frac{AH}{\text{وتر}} = \frac{AH}{9} \Rightarrow AH = 0.087 \times 9 = 0.783$$

(ب) با توجه به قسمت (الف) داریم:

$$\text{مساحت مثلث ABC} = \frac{1}{2} \times AH \times BC = \frac{1}{2} \times 0.783 \times 8 \approx 3.132$$



نهیة کننده:

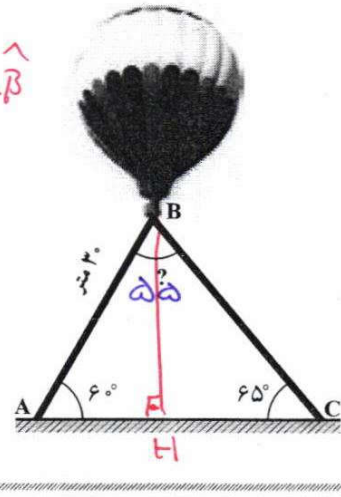
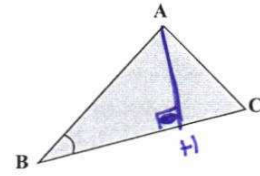
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

در هر مثلث، با معلوم بودن مقادیر طول دو ضلع مثلث و اندازه زاویه بین آنها نشان دهید:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times BC \times \sin B.$$

$$S = \frac{1}{2} AH \times BC \xrightarrow{\sin \hat{B} = \frac{AH}{AB}} S = \frac{1}{2} AB \times BC \sin \hat{B}$$

در راه پیمایی ۲۲ بهمن، یک بالن اطلاع رسانی توسط دو طناب به زمین بسته شده است. طول یکی از طناب‌ها ۳۰ متر است. می‌خواهیم طول طناب دوم را پیدا کنیم. الف) ابتدا اندازه زاویه B را به دست آورید. سپس ارتفاع وارد بر ضلع AC را رسم کنید و آن را BH بنامید.



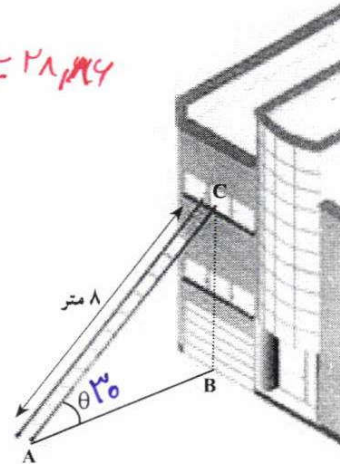
ب) طول BH را با استفاده از سینوس زاویه A به دست آورید.

$$\sin 40^\circ = \frac{BH}{AB} \rightarrow BH = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 30 = 15\sqrt{3}$$

پ) اکنون با استفاده از سینوس زاویه C، طول طناب دوم را پیدا کنید.

$$\triangle BHC \rightarrow \sin 45^\circ = \frac{BH}{BC} \rightarrow BC = \frac{BH}{\sin 45^\circ} = \frac{15\sqrt{3}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 21.21$$

مطابق شکل مقابل، نردبانی به طول ۸ متر در زیر پنجره ساختمانی قرار گرفته است. اگر زاویه نردبان با سطح زمین $\theta = 3^\circ$ باشد، ارتفاع پنجره تا زمین را محاسبه کنید. فاصله پای نردبان تا ساختمان چقدر است؟



$$\sin \theta = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BC}{8} \Rightarrow BC = 4$$

اکنون به کمک رابطه فیثاغورس داریم:

$$AB^2 = AC^2 - BC^2 = 8^2 - 4^2 = 48 \Rightarrow AB = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

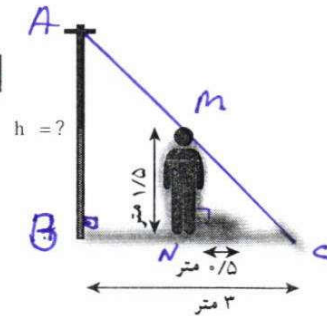
تمرین

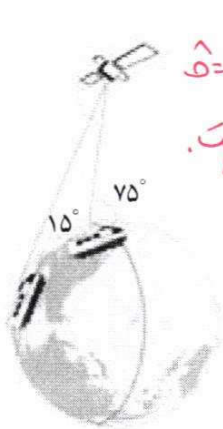
نسرین می‌خواهد ارتفاع یک تیر برق را که طول سایه آن ۳ متر است، حساب کند. قد نسرین ۱/۵ متر و طول سایه او در همان لحظه ۵/۵ متر است. ارتفاع تیر برق چقدر است؟

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{B} = \hat{N} = 90^\circ \\ \hat{C} = \hat{C} \end{array} \right. \rightarrow \triangle ABC \sim \triangle MNC \Rightarrow$$

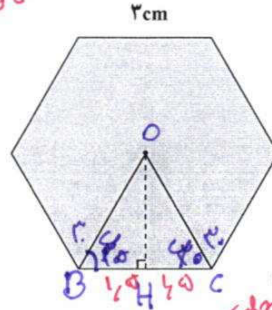
$$\frac{CN}{CB} = \frac{CM}{AC} = \frac{MN}{AB}$$

$$\frac{1.5}{3} = \frac{1.5}{h} \rightarrow h = \frac{4.5}{1.5} = 9 \text{ m}$$





$\hat{\Delta} = 75^\circ$
 $\hat{B} = 40^\circ$
 $\hat{C} = 42^\circ$
 ΔOBC
 به ΔOBC مساحت ضلعی منتظم



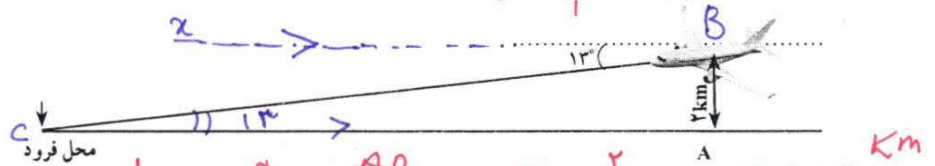
مساحت شش ضلعی منتظم زیر را به دست آورید.
 $\Delta OBH \rightarrow \sin 30^\circ = \frac{OH}{OB}$
 $OH = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 1,0 \times \sqrt{3}$
 $S_{OBC} = 3 \times \frac{1,0 \times \sqrt{3}}{2} = 1,5 \sqrt{3}$
 $S_{شش ضلعی} = 6 \times 1,5 \sqrt{3} = 9 \sqrt{3}$

یک هواپیما در ارتفاع 2 km از سطح زمین در حال فرود آمدن است. اگر زاویه هواپیما

با افق حدود 13° باشد، هواپیما در چه فاصله‌ای از نقطه A فرود می‌آید.

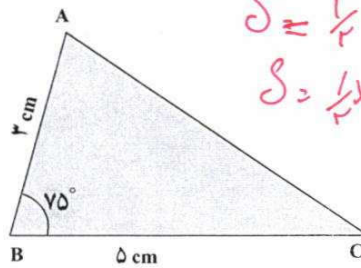
$\tan 13^\circ \approx 0,23$

$Bx \parallel AC \rightarrow \hat{B} = \hat{C} = 13^\circ$



$\tan 13^\circ = \frac{AB}{AC} \rightarrow AC = \frac{2}{0,23} \rightarrow AC \approx 8,7$

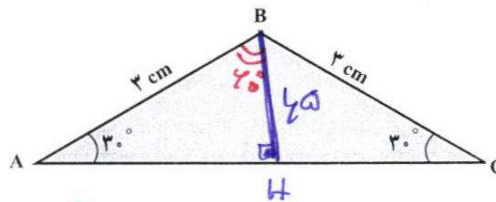
فرض کنید $\sin 75^\circ = 0,96$. مساحت مثلث ABC در شکل زیر را به دست آورید.



$S = \frac{1}{2} AB \times BC \sin 75^\circ$
 $S = \frac{1}{2} \times 2 \times 5 \times 0,96 = 4,8$

تهیه کننده:

مساحت مثلث ABC را پیدا کنید. گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان



$\Delta ABH \rightarrow \sin A = \frac{BH}{AB} \rightarrow BH = 1$

$S_{ABH} = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 \times \sin 30^\circ = 1,25 \times \sqrt{3} = 1,125 \sqrt{3}$

$\Delta ABH \cong \Delta ACH \rightarrow S_{ABH} = S_{ACH} \Rightarrow S_{ABC} = 2 \times 1,125 \sqrt{3} = 2,25 \sqrt{3}$

ماهواره‌ها به دور زمین در یک مسیر بسته، که آن را مدار می‌نامند، در حال گردش هستند. این مسیرها می‌توانند دایره‌ای یا بیضوی باشند، اما مرکز زمین در هر حالت در مرکز یا در نقطه کانونی مسیر آن قرار می‌گیرد. ماهواره‌ها روی سه نوع مدار که بستگی به نوع کاربرد آن دارد، قرار می‌گیرند:

ماهواره‌های مدار پایین زمین، مدار قطبی و مدار زمین‌ایست. برخی از ماهواره‌های هواشناسی و ماهواره‌های جاسوسی از نوع مدار پایین زمین‌اند. در این فاصله، چرخش ماهواره‌ها با حرکت دورانی زمین کاملاً هم‌زمان و برابر است و باعث می‌شود ماهواره نسبت به نقطه مفروض روی زمین ثابت بماند.

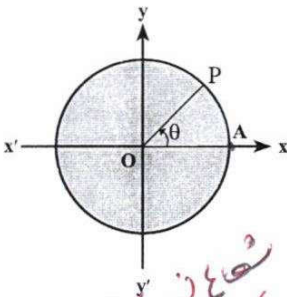
ماهواره مدار زمین‌ایست، نسبت به زاویه‌ای که ایستگاه زمینی آن را می‌بیند، ثابت است، در نتیجه احتیاجی به تغییر جهت آنتن نیست و آنتن هر ماهواره می‌تواند حداکثر 4/42 درصد سطح کره زمین را ببیند. تمام ماهواره‌های مخابراتی و تلویزیونی از این نوع هستند.

لقد تم شرحه في الفيديو
 شروط الاستخدام: لا يجوز نشر

درس دوم: دایره مثلثاتی



می‌توان از دایره مثلثاتی برای بیان مکان، زمان و توصیف بسیاری از حرکات همانند چرخش، حرکت دورانی، حرکات دورهای، حرکات تناوبی و حرکات رفت و برگشتی در یک مسیر مشخص، استفاده کرد. یکی از این کاربردها، استفاده در سیستم رادارهاست.



دایره روبه‌رو، به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۱ را در نظر بگیرید. نقطه A مبدأ حرکت برای رسم زاویه است. اگر نقطه P روی این دایره در خلاف جهت عقربه‌های ساعت حرکت کند، زاویه AOP مثبت و حرکت در جهت عقربه‌های ساعت، منفی است. چنین دایره‌ای را یک دایره مثلثاتی می‌نامیم.

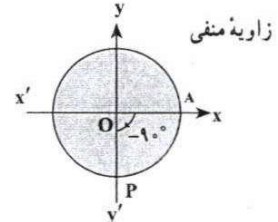
مثال

در هر یک از دایره‌های مثلثاتی سمت راست، مقدار زاویه‌های 9° ، -21° و 225° داده شده‌اند.

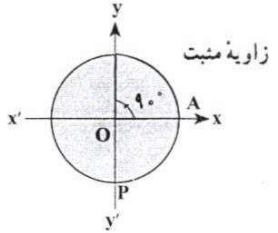
شعاع زاویه مثبت
 برای دایره‌ها

معالیت

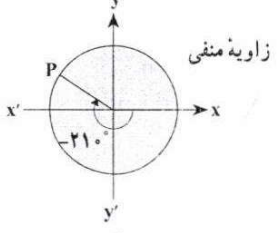
هر یک از زاویه‌های زیر را روی دایره‌های مثلثاتی داده شده، نشان دهید.



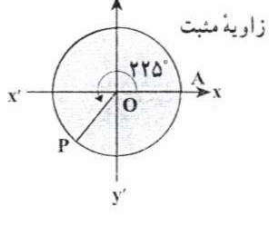
زاویه منفی



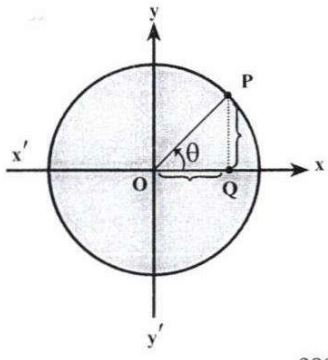
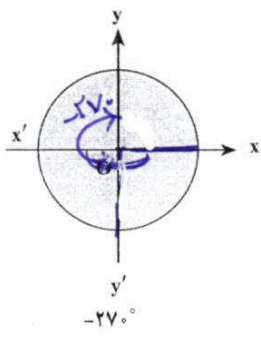
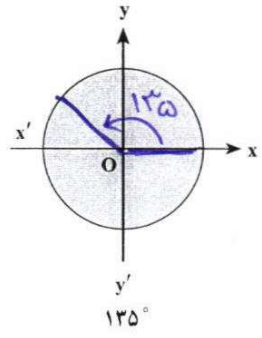
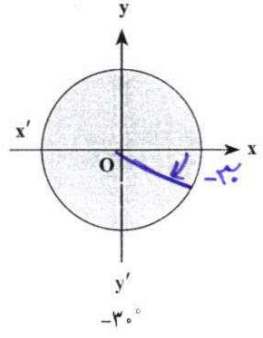
زاویه مثبت



زاویه منفی



زاویه مثبت



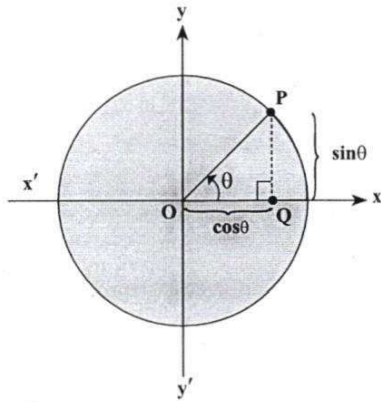
فرض کنید $P(x,y)$ نقطه‌ای دلخواه روی دایره مثلثاتی روبه‌رو باشد و θ زاویه‌ای است که نیم خط \vec{OP} با محور \vec{Ox} می‌سازد. از نقطه P خطی بر محور \vec{Ox} عمود می‌کنیم و محل برخورد را Q می‌نامیم. الف) در مثلث OPQ، نسبت‌های مثلثاتی زاویه θ را به دست آورید.

$$\cos\theta = \frac{OQ}{OP} \quad \text{و} \quad \sin\theta = \frac{PQ}{OP} \quad \text{و} \quad \tan\theta = \frac{PQ}{OQ}$$

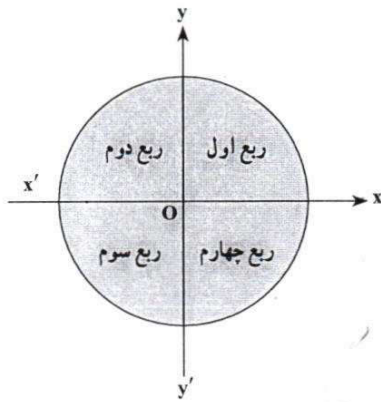
$$\cos\theta = OQ \quad \sin\theta = PQ$$

تهیه کننده:

ب) با توجه به قسمت (الف) می توان دید فاصله Q تا مبدأ با $\cos \theta$ برابر است و فاصله نقطه P تا پای عمود، یعنی نقطه Q با $\sin \theta$ برابر است.



با توجه به قسمت (ب) محور $x'Ox$ یا محور x ها را محور کسینوس ها و محور $y'Oy$ یا محور y ها را محور سینوس ها می نامیم. به عبارت دیگر، اگر نقطه دلخواهی روی دایره مثلثاتی باشد که نیم خط OP با قسمت مثبت محور x زاویه θ می سازد، آنگاه P نقطه ای با مختصات (x,y) است که در آن $x = \cos \theta$ و $y = \sin \theta$.



نکته: دو محور عمود بر هم $x'Ox$ و $y'Oy$ صفحه را به چهار قسمت تقسیم می کنند. هر یک از این قسمت ها را یک ناحیه یا یک ربع مثلثاتی می نامیم. با توجه به جهت دایره مثلثاتی، ناحیه xOy را ربع اول، ناحیه $x'Oy$ را ربع دوم، ناحیه $x'Oy'$ را ربع سوم و ناحیه xOy' را ربع چهارم مثلثاتی می نامیم.
نکته: زاویه های $0^\circ, 9^\circ, 18^\circ, 27^\circ$ و 36° زوایای مرزی هستند و آنها را در هیچ کدام از ناحیه های فوق در نظر نمی گیریم.

تاریخچه

مشخص کنید هر یک از زاویه های زیر در کدام یک از نواحی چهارگانه قرار می گیرد؟

- | | | | |
|----------------|---------------|----------------|---------------|
| الف) 3° | ب) 65° | ب) 182° | ت) 95° |
| چهارم | اول | سوم | سوم |

با توجه به آنچه در فعالیت قبل، به دست آوردید، توضیح دهید که اگر انتهای کمان روبه رو به زاویه ای در ربع اول باشد (زاویه در ربع اول باشد)، آنگاه چرا نسبت های مثلثاتی آن زاویه، همگی مثبت اند؟ در نامی اول

مثال

می خواهیم نسبت های مثلثاتی زاویه θ° را به دست آوریم. می دانیم در دایره مثلثاتی روبه رو، $\sin \theta = y$ و $\cos \theta = x$. اگر $\theta = 0^\circ$ ، آنگاه نقطه P روی نقطه A قرار می گیرد و داریم $\sin 0^\circ = 0$ ، همچنین $\cos 0^\circ = 1$ و $\tan 0^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$ ، اما $\cot 0^\circ$ تعریف نمی شود (چرا؟).
 $\cot \theta = \frac{x}{y}$

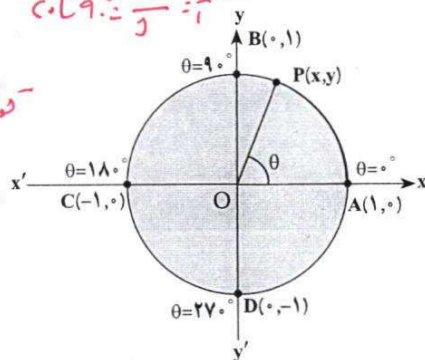
تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

فعالیت

$\sin 90^\circ = 1$ $\cos 90^\circ = 0$ $\tan 90^\circ = \frac{y}{x} = \frac{1}{0} = \text{تعیین نشده}$

۱ در دایره مثلثاتی روبرو اگر $\theta = 90^\circ$ ، نسبت های مثلثاتی θ را پیدا کنید.
 نقطه P روی دایره $B(0,1)$ است.
 $\sin 90^\circ = 1$ $\cos 90^\circ = 0$ $\tan 90^\circ = \frac{y}{x} = \frac{1}{0} = \text{تعیین نشده}$



۲ اگر $\theta = 180^\circ$ ، نسبت های مثلثاتی θ را پیدا کنید.
 نقطه P روی دایره $C(-1,0)$ است.
 $\sin 180^\circ = 0$ $\cos 180^\circ = -1$ $\tan 180^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0$ $\cot 180^\circ = \frac{x}{y} = \frac{-1}{0} = \text{تعیین نشده}$

۳ اگر $\theta = 270^\circ$ ، نسبت های مثلثاتی θ را پیدا کنید.
 نقطه P روی دایره $D(0,-1)$ است.
 $\sin 270^\circ = -1$ $\cos 270^\circ = 0$ $\tan 270^\circ = \frac{y}{x} = \frac{-1}{0} = \text{تعیین نشده}$ $\cot 270^\circ = \frac{x}{y} = \frac{0}{-1} = 0$

کار در کلاس

مقدار	0°	90°	180°	270°	360°
$\sin \theta$	0	1	0	-1	0
$\cos \theta$	1	0	-1	0	1
$\tan \theta$	0	تعریف نشده	0	تعیین نشده	0
$\cot \theta$	تعیین نشده	0	تعریف نشده	0	تعیین نشده

در ربع اول $\alpha \Rightarrow 0^\circ < \alpha < 90^\circ$
 در ربع دوم $\alpha \Rightarrow 90^\circ < \alpha < 180^\circ$
 در ربع سوم $\alpha \Rightarrow 180^\circ < \alpha < 270^\circ$
 در ربع چهارم $\alpha \Rightarrow 270^\circ < \alpha < 360^\circ$

فعالیت

۱ فرض کنید θ زاویه ای در ربع سوم دایره مثلثاتی باشد. با توجه به اینکه $y = \sin \theta$ و $x = \cos \theta$ و در ربع سوم، $x, y < 0$ ، علامت هر یک از نسبت های مثلثاتی θ را در ربع سوم مشخص کنید.

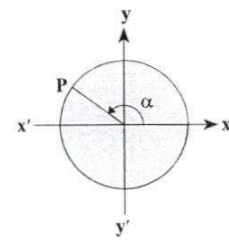
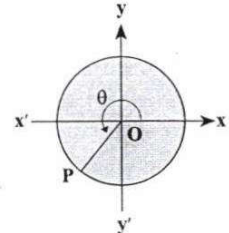
$\sin \theta < 0$ $\cos \theta < 0$ $\tan \theta > 0$ $\cot \theta > 0$

۲ فرض کنید α زاویه ای در ربع دوم دایره مثلثاتی در ربع دوم باشد. فعالیت قبل را برای α نیز تکرار کنید.

$\sin \theta > 0$ $\cos \theta < 0$ $\tan \theta < 0$ $\cot \theta < 0$

۳ جدول زیر را کامل کنید:

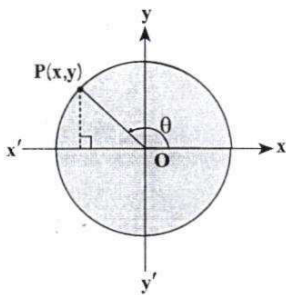
مقدار	ربع اول $x, y > 0$	ربع دوم $x < 0, y > 0$	ربع سوم $x < 0, y < 0$	ربع چهارم $x > 0, y < 0$
$\sin \theta$	+	+	-	-
$\cos \theta$	+	-	-	+
$\tan \theta$	+	-	+	-
$\cot \theta$	+	-	+	-



نکته: برای هر زاویه دلخواه θ ،
 $-1 \leq \sin \theta \leq 1$ و $-1 \leq \cos \theta \leq 1$

نهیہ کننده:

مثال



آقای جلالی، از دانش‌آموزان پرسید: اگر زاویه‌ای در ربع دوم مثلثاتی باشد و $\sin \theta = \frac{5}{\sqrt{7}}$ ،

آیا می‌توان سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را پیدا کرد؟

امین: می‌دانیم $\sin \theta = y = \frac{5}{\sqrt{7}}$ ، بنابراین P نقطه‌ای به عرض $\frac{5}{\sqrt{7}}$ است.

معلم: درست است و حالا طول نقطه P چگونه به دست می‌آید؟

امیرعلی: طبق رابطه فیثاغورس، در مثلث قائم‌الزاویه داریم: $x^2 + y^2 = 1$. بنابراین $x^2 + \frac{25}{7} = 1$ و در

نتیجه $x^2 = \frac{24}{7}$. اکنون با توجه به اینکه نقطه P در ناحیه دوم واقع است، داریم $x = -\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$.

معلم: آفرین، این راه کاملاً درست است، ولی کدام مقدار قابل قبول است؟

محمد مهدی: چون θ زاویه‌ای در ربع دوم است، پس طول نقطه P منفی است و از

این رو $x = -\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$ قابل قبول است.

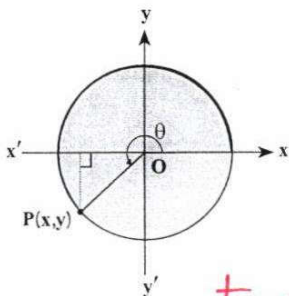
معلم: استدلال محمد مهدی کاملاً منطقی است و در نتیجه P نقطه‌ای به مختصات

$(-\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{7}}, \frac{5}{\sqrt{7}})$ است. در نتیجه:

$$\cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{-\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{7}}}{\frac{5}{\sqrt{7}}} = -\frac{2\sqrt{6}}{5}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{5}{-2\sqrt{6}}, \quad \cos \theta = x = -\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان



فرض کنید نقطه P روی دایره مثلثاتی قرار دارد به طوری که $\cos \theta = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ می‌دانیم

θ در ربع سوم قرار دارد، بنابراین $y = \sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

الف) مختصات نقطه P را به دست آورید. $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$

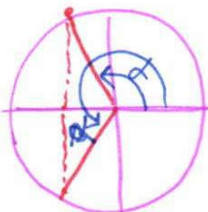
ب) سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه θ را به دست آورید.

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = 1 \quad \text{و} \quad \cot \theta = \frac{x}{y} = 1$$

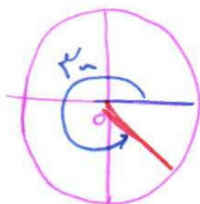
اگر $\cos \alpha = \frac{-2}{5}$ ، آنگاه در مورد ناحیه‌ای که α در آن قرار می‌گیرد، بحث کنید.

نمای توابع در ربع دوم و سوم

زاویه‌ای مثال بزنید که سینوس آن منفی و کسینوس آن مثبت باشد.



برای آنکه سینوس منفی و کسینوس مثبت باشد کافی است ربع دوم و سوم

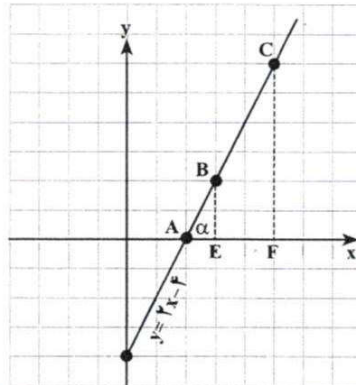


رابطه شیب خط با تانژانت زاویه

فعالیت

نمودار خط $y=2x-4$ در شکل روبه‌رو رسم شده است. دو نقطه B و C روی این خط را در نظر بگیرید و خطی از آنها به محور xها عمود کنید. بای عمودها را به ترتیب E و F بنامید.

الف) تانژانت زاویه α را به دست آورید. $\tan \alpha = \frac{BE}{AE} = \frac{CF}{AF} = \frac{2}{1} = \frac{4}{2}$



ب) شیب این خط را پیدا کنید.
 شیب خط = $\frac{\text{تفاضل عرضها}}{\text{تفاضل طولها}} = \frac{2-0}{3-2} = 2$

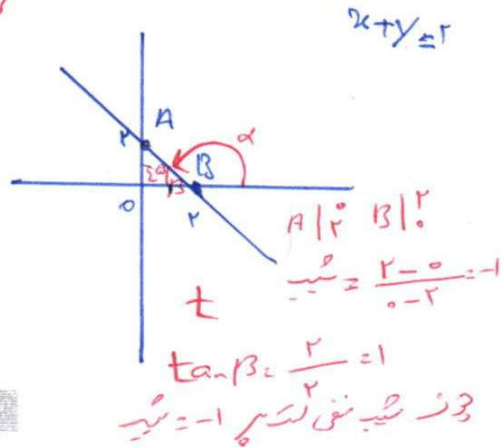
A [2 | 0]
B [3 | 4]

پ) از مقایسه قسمت الف) و ب) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ توضیح دهید.

نتیجه گرفته تانژانت بین خط و محور مثبت محور افقی معتد شیب خط است.

شیب هر خط که محور افقی را قطع می‌کند، برابر است با تانژانت زاویه بین آن خط و جهت مثبت محور افقی. به عبارت دیگر، اگر α زاویه‌ای باشد که خط با جهت مثبت محور افقی می‌سازد، آنگاه:

$\text{شیب خط} = \tan \alpha$



تکرار تمرین

فعالیت بالا را برای خط‌های زیر، تکرار کنید.

ب) $x+y=2$

الف) $2y-3x=5$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

معادله خطی را بنویسید که زاویه آن با محور xها 30° است و از نقطه $(1,0)$ می‌گذرد.

$\tan \alpha = a \rightarrow \tan 30^\circ = a \rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$y = ax + b \rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + b \xrightarrow{(1,0)} 0 = \frac{\sqrt{3}}{3} + b \rightarrow b = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

تمرین

۱) هر یک از زاویه‌های زیر را روی دایره مثلثاتی رسم کنید، سپس مشخص کنید در کدام

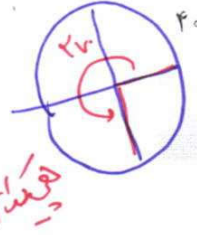
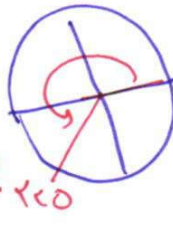
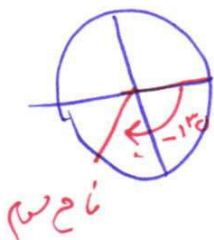
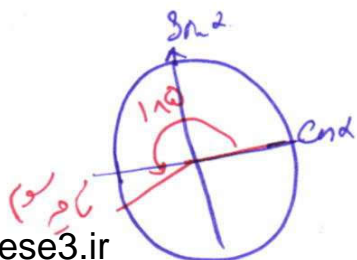
یک از نواحی چهارگانه قرار می‌گیرد.

ت) 185°

پ) -135°

ب) 225°

الف) $+27^\circ$

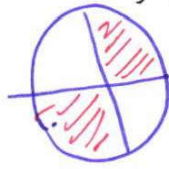


در اخترشناسی، اغلب به مسئله‌هایی برمی‌خوریم که برای حل آنها به مثلثات نیاز مندیم. ساده‌ترین این مسئله‌ها، پیدا کردن یک کمان دایره بر حسب درجه است. می‌توان دید، سینوس یک کمان از لحاظ قدرمطلق برابر با نصف طول وتری به اندازه دو برابر آن کمان است. همین تعریف ساده، اساس رابطه بین کمان‌ها و وترها را در دایره تشکیل می‌دهد و مثلثات هم از همین‌جا شروع شد. کهن‌ترین جدولی که به ما رسیده است و در آن طول وترهای برخی کمان‌ها داده شده است متعلق به هیبارک، اخترشناس سدهٔ دوم میلادی است و شاید بتوان تنظیم این جدول را نخستین گام در راه پیدایش مثلثات دانست. همهٔ کارهای ریاضی‌دانان و اخترشناسان یونانی در درون هندسه انجام گرفت و هرگز به مفهوم‌های اصلی مثلثات نرسیدند. خوارزمی نخستین جدول‌های سینوسی را تنظیم کرد و پس از او همه ریاضی‌دانان ایرانی گام‌هایی در جهت تکمیل این جدول‌ها و گسترش مفهوم‌های مثلثاتی برداشتند. مروزی جدول سینوس‌ها را تقریباً ۳۰ درجه به ۳۰ درجه تنظیم کرد و برای نخستین بار به دلیل نیازهای اخترشناسی مفهوم تازانت را تعریف کرد. جدی‌ترین تلاش‌ها به‌وسیله ابوریحان بیرونی و ابوالوفای بوزجانی انجام گرفت و سرانجام خواجه نصیرالدین طوسی با جمع‌بندی کارهای دانشمندان ایرانی پیش از خود، نخستین کتاب مستقل مثلثات را نوشت. بعد از طوسی، جمشید کاشانی ریاضی‌دان ایرانی با استفاده از روش زیبایی که برای حل معادلهٔ درجه سوم پیدا کرده بود، توانست راهی را برای محاسبهٔ سینوس کمان یک درجه، با هر دقت دلخواه پیدا کند. پیشرفت بعدی دانش مثلثات از سدهٔ بازدهم میلادی و در اروپای غربی انجام گرفت.

۲ در هر یک از موارد زیر، نسبت مثلثاتی زاویه‌ای داده شده است. سایر نسبت‌های مثلثاتی را به دست آورید.

الف) $\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{49}}$ (در ربع چهارم)
 $\sin \alpha = 1 - \frac{3}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{49} - 3}{\sqrt{49}} \rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{49} - 3}{\sqrt{49}}$
 $\tan \alpha = \frac{-\sqrt{49}}{3} \quad \cot \alpha = -\frac{3}{\sqrt{49}}$
 ب) $\sin \beta = \frac{-1}{2}$ (در ربع سوم)

۳ اگر $\sin \theta$ و $\tan \theta$ هم علامت باشند، آنگاه θ در کدام ربع مثلثاتی قرار دارد؟

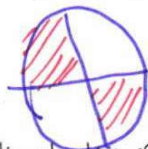


θ می‌تواند در ربع اول یا سوم باشد.

۴ حدود زاویهٔ θ را در هر یک از حالات زیر مشخص کنید.

الف) $\sin \theta > 0, \cos \theta > 0$ ب) $\sin \theta < 0, \cos \theta < 0$

۵ اگر $\sin \alpha \times \cos \alpha < 0$ ، آنگاه α در کدام یک از نواحی چهارگانه می‌تواند قرار بگیرد؟



چرا؟ $\sin \alpha, \cos \alpha$ متعلق به ربع‌ها هستند.

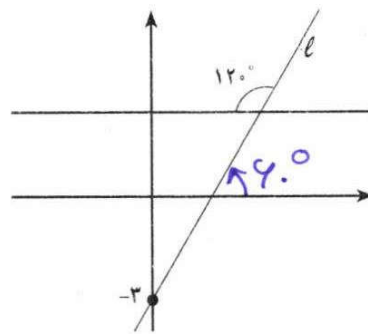
بر α در ربع دوم یا سوم است.

۶ زاویه‌ای مثل α پیدا کنید به طوری که $\tan \alpha > \cot \alpha$. اکنون زاویه‌ای مثل β پیدا کنید،

به طوری که $\cot \beta > \tan \beta$. از این تمرین چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۷ معادلهٔ خطی را بنویسید که زاویهٔ آن با محور xها ۴۵ است و نقطهٔ (۲، ۰) روی آن قرار دارد.
 $\alpha = 45^\circ \rightarrow \tan \alpha = 1, \cot \alpha = 1 \rightarrow \tan \alpha > \cot \alpha$
 $\beta = 135^\circ \rightarrow \tan \beta = -1, \cot \beta = -1 \rightarrow \cot \beta > \tan \beta$

۸ با توجه به شکل زیر، معادلهٔ خط l را به دست آورید.
 $\alpha = 45^\circ \rightarrow \tan \alpha = 1 \rightarrow y = x + b$
 $y = ax + b \Rightarrow y = x + b \rightarrow 3 = 0 + b \Rightarrow y = x + 3$



$\tan 45^\circ = 1 \rightarrow \alpha = 45^\circ$
 $y = \sqrt{3}x + b \rightarrow -3 = \sqrt{3} \cdot 0 + b$

$y = \sqrt{3}x - 3$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

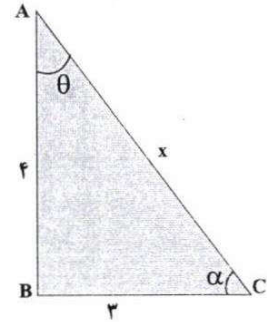
درس سوم: روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

در درس‌های قبل با نسبت‌های مثلثاتی و دایره مثلثاتی آشنا شدید. در این درس روابطی بین این نسبت‌ها و کاربردهایی از آنها را بیان می‌کنیم.

فعالیت

مثلث قائم‌الزاویه ABC را در نظر بگیرید.

الف اندازه وتر یعنی x را بیابید و سپس مقدار عددی هر یک از چهار نسبت مثلثاتی را برای زاویه θ و α به دست آورید.



$$\sin \theta = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{5}$$

$$\cos \theta = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{5}$$

$$\tan \theta = \frac{BC}{AB} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{3}{4}$$

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{4}{3}$$

$$\sin \alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{5}$$

$$\tan \alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{3}$$

$$\cot \alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{4}$$

ب با توجه به مقادیر عددی حاصل در قسمت (الف) مقدار $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$ و $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta$ را به دست آورید.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\sin \theta \times \sin \theta = (\sin \theta)^2 = \sin^2 \theta$$

ب درستی رابطه $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ را با استفاده از تعریف و اضلاع مثلث، بررسی کنید.

$$(\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 + \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \frac{BC^2 + AB^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2} = 1$$

ت مشابه قسمت (ب) درستی رابطه $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ را بررسی کنید.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 = \frac{AB^2 + BC^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2} = 1$$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

اگر α زاویه دلخواهی باشد، همواره داریم:
 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

کار در کلاس

با توجه به رابطه بالا، یعنی $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ جاهای خالی را پر کنید:
 الف) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$
 ب) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$

تذکر: در رابطه‌هایی که به دست آوردید، علامت نسبت مثلثاتی زاویه α با توجه به ناحیه‌ای که زاویه α در آن قرار دارد، تعیین می‌شود.
 استنباطی

مثال

اگر α زاویه‌ای در ناحیه سوم مثلثاتی باشد و $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$ ، آنگاه مقدار $\tan \alpha$ ، $\cos \alpha$ و $\cot \alpha$ را به دست آورید.
 $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \xrightarrow{\text{در ناحیه سوم}} \cos \alpha = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = -\frac{3}{5}$
 $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$ $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$

کار در کلاس

رابطه‌های تانژانت بر حسب کسینوس و کتانژانت بر حسب سینوس

در این قسمت رابطه‌ای برای تانژانت بر حسب کسینوس یک زاویه و همچنین رابطه‌ای برای کتانژانت بر حسب سینوس، به دست می‌آوریم:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\Rightarrow \tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad (\cos \alpha \neq 0)$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$\Rightarrow 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad (\sin \alpha \neq 0)$$

تهیه کننده:

اگر $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ و $\tan \alpha = \frac{-3}{4}$ ، آنگاه سایر نسبت های مثلثاتی زاویه α را به دست

آورید.

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \rightarrow 1 + \frac{9}{16} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \rightarrow \frac{25}{16} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{4}{5}$$

$90^\circ < \alpha < 180^\circ \rightarrow \cos \alpha = -\frac{4}{5}$

$$\cot \alpha = \frac{-4}{3} \rightarrow 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \rightarrow 1 + \frac{16}{9} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \rightarrow \frac{25}{9} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{5}{9}$$

$90^\circ < \alpha < 180^\circ \rightarrow \sin \alpha = \frac{5}{9}$

اتحاد مثلثاتی

هر یک از تساوی های $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ، $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ ($\cos \alpha \neq 0$) ، $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ ($\sin \alpha \neq 0$) را که به ازای هر α همواره برقرار است ، یک اتحاد مثلثاتی می نامیم .

هرگاه بخواهیم ثابت کنیم بین دو عبارت مثلثاتی یک تساوی (اتحاد) برقرار است ، می توانیم یک طرف تساوی را بنویسیم و با توجه به روابط بین نسبت های مثلثاتی به طرف دیگر برسیم . به مثال زیر توجه کنید :

مثال

درستی اتحاد مثلثاتی زیر را بررسی کنید .

$$\left(\frac{1}{\cos \theta} + \tan \theta\right)(1 - \sin \theta) = \cos \theta$$

$$(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta) \stackrel{\text{اتحاد مزدوج}}{=} 1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta$$

حل :

$$\begin{aligned} \text{طرف چپ} &= \left(\frac{1}{\cos \theta} + \tan \theta\right)(1 - \sin \theta) = \left(\frac{1}{\cos \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta}\right)(1 - \sin \theta) \\ &= \left(\frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta}\right)(1 - \sin \theta) = \frac{1 - \sin^2 \theta}{\cos \theta} = \frac{\cos^2 \theta}{\cos \theta} = \cos \theta = \text{طرف راست} \end{aligned}$$

تمرین در کلاس

با فرض بامعنی بودن هر کسر ، درستی هر یک از تساوی های زیر را بررسی کنید :

الف) $\sin^4 \theta - \cos^4 \theta = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta$

طرف چپ $= \sin^4 \theta - \cos^4 \theta \stackrel{\text{اتحاد مزدوج}}{=} (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \times (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \times 1$

تهیه کننده :



ب) $\frac{1}{\cos \alpha} + \cot \alpha = \frac{\tan \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha}$

طرف راست = $\frac{\tan \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\tan \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha} + \cot \alpha$

کدام یک از تساوی‌های زیر یک اتحاد است؟ چرا؟

الف) اتحاد است:

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha$

$\alpha = 30^\circ \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$

با ضرب کردن طرفین اتحاد مثلثاتی $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ در $\cot \alpha$ یک اتحاد مثلثاتی بسازید؛ سپس درستی آن را اثبات کنید.

$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad \times \cot \alpha \quad \rightarrow \quad \cot \alpha + \cot \alpha \tan^2 \alpha = \frac{\cot \alpha}{\cos^2 \alpha}$

$\cot \alpha + \tan \alpha = \frac{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}}{\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}} = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}$

زاد برکت در این نسبت!

تمرین

۱ فرض کنید α زاویه‌ای در ناحیه دوم مثلثاتی باشد و $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$. نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه α را به دست آورید.

$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \rightarrow \sin \alpha = \frac{4}{5}$

۲ اگر $\tan \alpha = \frac{-4}{3}$ و α زاویه‌ای در ناحیه چهارم مثلثاتی باشد، نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه α را به دست آورید.

$\tan \alpha = \frac{-4}{3} \rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-4}{3} \rightarrow \sin \alpha = -\frac{4}{5} \rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{5}$

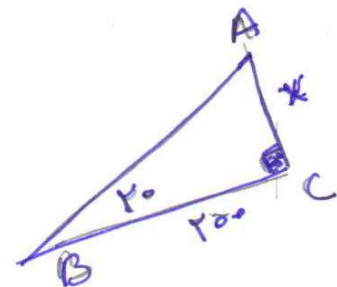
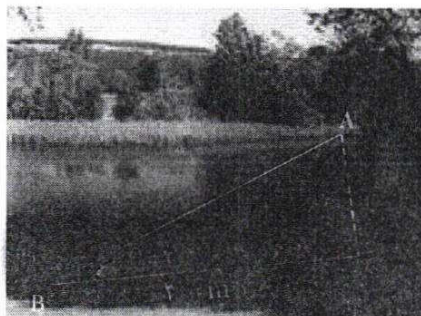
۳ اگر $\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، آنگاه نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه 135° را به دست آورید.

$\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \tan 135^\circ = -1$

۴ اگر $\tan 24^\circ = \sqrt{3}$ ، آنگاه نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه 24° را به دست آورید.

$\tan 24^\circ = \sqrt{3} \rightarrow \sin 24^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \cos 24^\circ = \frac{1}{2}$

۵ شخصی می‌خواهد عرض یک رودخانه را اندازه‌گیری کند. او ابتدا مطابق شکل، نقطه‌ای چون C و سپس نقطه‌ای مانند A را در امتداد C و در طرف دیگر رودخانه مشخص می‌کند و به اندازه ۲۰۰ متر از C به صورت افقی در امتداد رودخانه حرکت می‌کند تا به نقطه B برسد. اگر زاویه دید این شخص (از نقطه B به نقطه A)، 2° باشد و $\sin 2^\circ = \frac{0.34}{1}$ ، او چگونه می‌تواند عرض رودخانه را محاسبه کند؟ (پاسخ خود را تا دو رقم اعشار بر حسب متر بنویسید.)



$\sin \hat{B} = \frac{AC}{AB} = \frac{34}{100}$

$\rightarrow AB = \frac{100}{34} AC = \frac{10}{17} AC$

۴۵ $AB^2 = AC^2 + BC^2 \Rightarrow \left(\frac{10}{17} AC\right)^2 = AC^2 + 200^2$

$\frac{100}{289} AC^2 = AC^2 + 200^2 \rightarrow \frac{199}{289} AC^2 = 40000 \rightarrow AC = 419.22$

$$\frac{1}{\sin \theta} \times \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{\cos \theta}$$

ب) $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$

$\cos^2 \theta = (1 - \sin^2 \theta)(1 + \sin^2 \theta)$

تقسیم طریز بر $\cos \theta (1 + \sin^2 \theta)$

$$\frac{\cos \theta}{1 + \sin^2 \theta} = \frac{1 - \sin^2 \theta}{\cos \theta}$$

با فرض بامعنی بودن هر کسر، درستی هر یک از تساوی های زیر را بررسی کنید.

ب) $\frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} = \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta}$

الف) $\frac{1}{\sin \theta} \times \tan \theta = \frac{1}{\cos \theta}$

ج) $\frac{1 + \sin x - \cos^2 x}{1 + \sin x} =$

ت) $1 - \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} = \sin x$

پ) $\frac{1 + \tan \alpha}{1 + \cot \alpha} = \tan \alpha$

ث) $\frac{1}{\cos x} - \tan x = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$

$$\frac{1 + \sin x - 1 + \sin^2 x}{1 + \sin x} = \frac{\sin x (1 + \sin x)}{(1 + \sin x)} = \sin x$$



اولین دانشمندی که جدول سینوس، کسینوس، شعاع دایره ای و نسبت مثلثاتی را کشف کرد، ابوالوفا محمد بن یحیی بن اسماعیل بن عباس بوزجانی خراسانی است. وی یکی از مفاخر علمی ایران، ریاضی دان و اخترشناس سده چهارم هجری قمری در اول رمضان ۳۲۸ (ه.ق) در بوزجان (تربت جام امروزی)، در مرز خراسان و افغانستان زاده شد. او مقدمات ریاضیات زمان را، همان جا، نزد دایی و عمویش فرا گرفت. در سن ۲۰ سالگی به بغداد رفت و نزد اساتید مختلفی به تحصیل خود ادامه داد. وی پس از مدتی به یکی از دانشمندان مشهور زمان خود تبدیل شد و با دانشمندان هم عصر خود، مکاتبات علمی داشت. به عنوان مثال، وقتی ابوریحان در خوارزم بود، برای رصد همزمان گرفتگی ماه، با بوزجانی که در بغداد بود، قرار گذاشتند تا نتیجه دو رصد که در دو نقطه مختلف انجام می گرفت را با هم مقایسه کنند. ابوالوفا بر بسیاری از آثار پیشینیان (ایرانی و یونانی) مثل «مقدمات» اقلیدس، «جبر و مقابله» خوارزمی، «جبر» دیوفانت، «مجسطی» بطلمیوس و غیره تفسیر نوشت. خود نیز ابتکارات و نوآوری های بسیاری در هندسه و مثلثات دارد. سرانجام وی در سوم رجب ۳۸۸ (ه.ق) در بغداد درگذشت.

$$\frac{1 + \tan \alpha}{1 + \cot \alpha} = \frac{1 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{1 + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$$

$$\frac{1}{\cos x} - \tan x = \frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1 - \sin x}{\cos x} \times \frac{1 + \sin x}{1 + \sin x} = \frac{1 - \sin^2 x}{\cos x (1 + \sin x)}$$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

$$= \frac{\cos x}{1 + \sin x}$$