

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

# جزوه ریاضی (۱)

رشته‌های ریاضی و فیزیک – علوم تجربی

پایه دهم

متوسطه دوم

وبسایت مدرسه سوم

# توان‌های گویا و عبارت‌های جبری



پژوهشگاه رویان هشتم خرداد ماه سال ۱۳۷۰ به عنوان مرکز جراحی محدود با هدف ارائه خدمات درمانی به زوج‌های نابارور و پژوهش و آموزش در زمینه علوم باروری و ناباروری توسط زنده یاد دکتر سعید کاظمی آشتیانی و گروهی از پژوهشگران و همکارانش در جهاد دانشگاهی علوم پزشکی ایران تأسیس شد. در حال حاضر این پژوهشگاه فعالیت‌های پژوهشی خود را در سه پژوهشکده پزشکی تولیدمثل، سلول‌های بنیادی و زیست فناوری دنبال می‌کند و در دو مرکز درمان ناباروری و سلول‌درمانی نیز به بیماران خدمات ارائه می‌کند.

درس اول ریشه و توان

درس دوم ریشه ام

درس سوم توان‌های گویا

درس چهارم عبارت‌های جبری



## فصل ۳

# توان های گویا و عبارات جبری

### ۱.۳ ریشه و توان اعداد حقیقی

در سال گذشته با ریشه های دوم و سوم عددها آشنا شده اید. ریشه و توان رابطه دو سویه ای با هم دارند.

$$(-3) \xleftrightarrow[\text{ریشه سوم}]{\text{توان سه}} -27 \quad \text{یا} \quad (-3)^3 = -27 \longleftrightarrow \sqrt[3]{-27} = -3$$

**مثال ۱.۳.** در هر مورد جاهای خالی را پر کنید.

$$2^4 = 16 \longleftrightarrow$$

$$11^2 = 121 \longleftrightarrow$$

$$(0.25)^2 = 0.0625 \longleftrightarrow$$

$$(0.5)^2 = 0.25 \longleftrightarrow$$

$$(-9)^2 = 81 \longleftrightarrow$$

$$\sqrt{81} = 9 \longleftrightarrow$$

$$\sqrt[3]{27} = 3 \longleftrightarrow$$

$$\sqrt{50} = 5\sqrt{2} \longleftrightarrow$$

$$\sqrt{100} = 10 \longleftrightarrow$$

$$\sqrt{1000} = 10\sqrt{10} \longleftrightarrow$$

**مثال ۲.۳.** حجم یک مکعب برابر  $5^3 \text{ cm}^3$  است. ضلع مکعب با دقت یک رقم اعشار چقدر است؟

در حالت کلی توان و ریشه رابطه‌ی عکس با هم دارند. مطالب مطرح شده در بالا را بصورت دقیق تر در تعریف زیر آورده ایم.

**تعریف ۱.۳.** فرض کنیم  $n \geq 2$  عددی طبیعی باشد. در این صورت عدد حقیقی  $b$  را یک ریشه  $n$  ام عدد حقیقی  $a$  گوئیم هرگاه  $b^n = a$  باشد.

مثلاً  $-3$  ریشه پنجم  $-243$  است چرا که  $(-3)^5 = -243$ . همچنین دو عدد  $2$  و  $-2$  ریشه چهارم  $16$  می باشند چرا که  $(\pm 2)^4 = 16$  است. اگر  $n$  زوج باشد عدد حقیقی و مثبت  $a$  دارای دو ریشه  $n$  ام می باشد که قرینه یکدیگرند. در این حالت ریشه  $n$  ام مثبت را ریشه  $n$  ام اصلی می نامیم و با نماد  $\sqrt[n]{a}$  نشان می دهیم. پس حاصل عبارت  $\sqrt[4]{81}$  فقط برابر  $3$  است و هیچگاه از عبارت نادرست  $\sqrt[4]{81} = -3$  استفاده نمی کنیم. اعداد منفی دارای ریشه  $n$  ام زوج نیستند ولی ریشه  $n$  ام فرد دارند. مثلاً  $\sqrt[5]{-32} = -2$  وجود ندارد اما  $\sqrt[5]{-32} = -2$  است.

**مثال ۳.۳.** کامل کنید.

$$۱) \sqrt[3]{64} =$$

$$۲) \sqrt[6]{64} =$$

$$۳) \sqrt[5]{1024} =$$

$$۴) \sqrt[4]{0.0625} =$$

$$۵) \sqrt{\frac{121}{100}} =$$

$$۶) \sqrt[3]{\frac{1}{x^3}} =$$

$$۷) \sqrt{\frac{36}{25}}$$

$$۸) \sqrt[3]{2\frac{10}{27}}$$

$$۹) \sqrt[2]{(2\sqrt{2})^2}$$

$$۱۰) \sqrt{8\sqrt{4}\sqrt[3]{64}}$$

مهمترین خواص رادیکال‌ها در زیر فهرست کرده‌ایم.

$$۱) \sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{فرد } n \\ |a| & \text{زوج } n \end{cases}$$

$$۲) \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \quad \text{واضح است که باید } a, b \text{ مثبت باشند.}$$

$$۳) \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$۴) (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad a \geq 0$$

$$۵) \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a} \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad a \geq 0$$

$$۶) a \sqrt[n]{b} = \begin{cases} \sqrt[n]{a^n b} & n > 1 \text{ فرد } n \\ \sqrt[n]{a^n b} & b \geq 0, a \geq 0 \text{ زوج } n \\ -\sqrt[n]{a^n b} & b \geq 0, a \leq 0 \text{ زوج } n \end{cases}$$

$$۷) \sqrt[mn]{a^m} = \sqrt[n]{a} \quad a > 0, \quad m, n \in \mathbb{N}$$

**یادداشت تاریخی:** رسم عدد  $\sqrt[3]{2}$  روی محور یا کلا رسم پاره خطی با طول  $\sqrt[3]{2}$  یکی از قدیمی‌ترین مسائل در تاریخ ریاضیات است. این مسئله به تضعیف مکعب معروف است. داستانی نقل می‌کنند که یکی از فراعنه مصر که مقبره‌ای برای فرزندش می‌ساخته (مقبره به شکل مکعب مستطیل بوده است. البته مدفن اصلی مقبره) به مهندسان دستور داده که مقبره کوچک است و آن را دو برابر کنید. مهندسان به اشتباه اضلاع مکعب را دو برابر کرده‌اند و مقبره بسیار بزرگتر از انتظار پادشاه بود. در واقع مکعب مستطیلی که حجم آن دو برابر دیگری باشد نیاز به ترسیم و استفاده از عدد  $\sqrt[3]{2}$  دارد. اما به کمک خط کش و پرگار ساده این کار امکان پذیر نیست. در این زمینه می‌توانید مسئله تضعیف مکعب را در گوگل جستجو کنید. حال ممکن است این سوال به ذهنتان خطور کند که از کجا بدانیم چه اعدادی را می‌شود با خط کش و پرگار ترسیم کرد. پاسخ دقیق به این پرسش در حال حاضر با اطلاعات شما غیرممکن است اما بطور خلاصه می‌توان گفت تمام اعداد گویا ترسیم پذیرند. عددی حقیقی چون  $r$  ترسیم پذیر با خط کش و پرگار است هرگاه بتوان با تعداد متناهی عملیات جمع یا تفریق یا ضرب یا تقسیم و یا ریشه دوم گرفتن از اعداد صحیح حاصل شود. پس با این حساب چون ۲ و ۳ ترسیم پذیرند پس عدد  $2 + \sqrt{3} + \sqrt{5}$  نیز ترسیم پذیر است.

تذکر مهم: آیا بدون استفاده از ماشین حساب می توان مقدار تقریبی (اما با دقت بالا) رادیکال ها را بدست آورد؟ پاسخ مثبت است. دستور زیر در این ارتباط بسیار مفید است:

$$\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a^n \pm b} \approx a \pm \frac{b}{na^{n-1}}$$

$$\sqrt[3]{65} = \sqrt[3]{4^3 + 1} \approx 4 + \frac{1}{3 \times 4^2} = 4 + 0.02 = 4.02$$

$$\sqrt[5]{30} = \sqrt[5]{2^5 - 2} \approx 2 - \frac{2}{5 \times 2^4} = 2 - 0.02 = 1.98$$

**مثال ۴.۳.** درست و نادرست را مشخص کنید.

- ۱ - هر عدد حقیقی دو ریشه پنجم دارد که قرینه یکدیگرند.
- ۲ - ریشه های چهارم عدد ۱۶ دو عدد  $\pm\sqrt[4]{16}$  می باشند
- ۳ - هر عدد همواره ریشه  $n$  ام دارد.
- ۴ - هر عدد فرد همواره دارای ریشه هفتم است.

**مثال ۵.۳.** آیا رابطه  $\sqrt[n]{a+b} = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$  درست است؟ چرا؟

**مثال ۶.۳.** آیا رابطه  $(\sqrt[n]{a})^n = a$  همیشه درست است؟ چرا؟

**مثال ۷.۳.** اگر  $x = \sqrt[n]{a}$  باشد و فرجه  $n$  را افزایش دهیم برای مقدار  $x$  چه اتفاقی می افتد؟ بزرگتر می شود یا کوچکتر می شود؟

**مثال ۸.۳.** از دو عدد  $\sqrt[3]{2}$  و  $\sqrt[4]{3}$  کدام بزرگتر است؟

**مثال ۹.۳.** عدد  $\sqrt[3]{321}$  مابین کدام دو عدد صحیح متوالی است؟

مثال ۱۰.۳. کامل کنید.

۱)  $\sqrt[3]{125} =$

۲)  $\sqrt[5]{-32} =$

۳)  $\sqrt[3]{128} =$

۴)  $\sqrt[4]{256} =$

۵)  $\sqrt[3]{-1} =$

۶)  $\sqrt[4]{625} =$

۷)  $-\sqrt[4]{16} =$

۸)  $\sqrt[5]{-\frac{1}{32}} =$

۹)  $\sqrt[3]{-0.001} =$

۱۰)  $\sqrt[6]{0} =$

۱۱)  $\sqrt[4]{(-3)^4} =$

۱۲)  $\sqrt[6]{(-2)^6} =$

۱۳)  $\sqrt[4]{16} \times \sqrt[4]{81} =$

۱۴)  $a^2 \circ a^3 \quad 0 < a < 1$

۱۵)  $\sqrt{a} \circ \sqrt[3]{a} \quad 0 < a < 1$

۱۶)  $\sqrt[3]{a} \circ \sqrt[5]{a} \quad 0 < a < 1$

۱۷)  $(\sqrt[4]{16})^4 =$

۱۸)  $(\sqrt[3]{-8})^2 =$

۱۹)  $\sqrt{150} =$

۲۰)  $\sqrt{486} =$

۲۱)  $\sqrt[3]{1080} =$

۲۲)  $\sqrt[5]{800} =$

۲۳)  $\sqrt[2]{\frac{3}{4}} \times \sqrt[2]{\frac{9}{16}} =$

۲۴)  $\sqrt[2]{128 \times 314}$

**مثال ۱۱.۳.** حاصل عبارات زیر را تا سرحد امکان ساده کنید.

$$۱) \sqrt[۴]{\frac{(a+b)^۴}{(a-b)^۴}} =$$

$$۲) \sqrt{۴x^۲ + ۴x + ۱} =$$

$$۳) \frac{\sqrt{x^۳y^۳}}{\sqrt{xy}}$$

$$۴) ۲\sqrt{۲۷} \times ۳\sqrt{۱۲} =$$

$$۵) \sqrt[۳]{a^۲} \times \sqrt[۴]{a^۳} =$$

$$۶) \sqrt[۵]{a^۳} \times \sqrt[۶]{a^۵} \times \sqrt[۳]{a^۲} =$$

$$۷) \sqrt[۳]{۴ - ۲\sqrt{۲}} \times \sqrt[۶]{۶ + ۴\sqrt{۲}} =$$

$$۸) \sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}\sqrt[۳]{۲}} =$$

$$۹) \sqrt[۴]{۶ + ۴\sqrt{۲}} \times \sqrt{۲ - \sqrt{۲}} =$$

$$۱۰) \sqrt{(c-1)^۲} - \sqrt{(1+c)^۲} = \quad , c \in [-1, 1]$$

$$۱۱) (۲\sqrt{۲} - \sqrt{۵} + ۳\sqrt{۲})(\sqrt{۱۸} - \sqrt{۲۰} + ۲\sqrt{۲})$$



تمرین ۱.۳. حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

$$۱) \sqrt[۵]{-۳۲(x-y)^{۱۰}} =$$

$$۲) \sqrt[۳]{-(x-y)^۶} =$$

$$۳) \sqrt[۳]{۲۷c^۷} =$$

$$۴) \sqrt[۳]{۲۴} \times \sqrt[۳]{۲} =$$

$$۵) \mp \sqrt{۶۲۵} =$$

$$۶) \sqrt[۳]{\sqrt{۲}+۱} \times \sqrt[۳]{\sqrt{۲}-۱} =$$

$$۷) \sqrt{۲\sqrt{۲}-\sqrt{۳}} \times \sqrt[۴]{۱۱+۴\sqrt{۶}} =$$

$$۸) \sqrt{۳۱} \times \sqrt{۶-\sqrt{۵}} \times \sqrt{۳+\sqrt{۳-\sqrt{۵}}} \times \sqrt{۳-\sqrt{۳-\sqrt{۵}}} =$$

$$۹) \sqrt{۱۱-۲\sqrt{۲}} =$$

$$۱۰) \sqrt{۱۳+\sqrt{۴۸}} =$$

$$۱۱) \sqrt{۲+\sqrt{۳}} \times \sqrt{۲+\sqrt{۲+\sqrt{۳}}} \times \sqrt{۲+\sqrt{۲+\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}} \times$$

$$\sqrt{۲-\sqrt{۲+\sqrt{۲+\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}}} =$$

$$۱۲) \sqrt[۴]{\frac{-۲۴۳}{x^۲-\sqrt{x^۴+۶x^۲+۹}}} =$$

$$۱۳) x\sqrt{-x} \times \sqrt[۳]{x} =$$

## ۲.۳ توان های گویا

از کلاس نهم برخی مطالب را در مورد توان می دانید. با اینحال جهت مرور، مطالب زیر را آورده ایم.  
**تعریف ۲.۳.** فرض کنید  $n \in \mathbb{N}$  باشد و  $a \in \mathbb{R}$  عددی دلخواه. عدد  $a^n$  را بصورت:

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_n$$

تعریف می کنیم. برای اعداد صحیح منفی نیز این تعریف قابل تعمیم است.  $a^{-n}$  را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

در نهایت  $a^0 = 1$  تعریف می شود و حال  $a^n$  را برای تمام اعداد صحیح تعریف کرده ایم. مهمترین خواص توان عبارتند از:

$$1 - \text{همواره } a^n \times a^m = a^{m+n}$$

$$2 - \text{همواره } \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$3 - \text{همواره } (a^m)^n = a^{mn}$$

پرسش: آیا دو مقدار  $a^{m^n}$  و  $(a^m)^n$  مساوی اند؟ چرا؟  
 حال می خواهیم توان را به اعداد گویا تعمیم دهیم.

گازی با فشار وارد یک مخزن می شود. در هر دقیقه فشار گاز دو برابر می شود تا به فشار معینی برسد.

دقیقه	۱	۲	۳	...	$n$
فشار	۲	$۲^۲$	$۲^۳$	...	$۲^n$

حال پرسش این است که در  $۳^۰$  ثانیه پس از دقیقه دوم فشار گاز چقدر خواهد بود؟ واضح است که جواب عددی چون  $a$  است که  $۲^۳ < a < ۲^۴$ . چون زمان دقیق را داریم پس می توان ادعا کرد که  $a = ۲^{\frac{۵}{۲}}$  که البته درست است اما چه معنایی می دهد؟ اگر تصور کنیم مقدار فشار در هر  $۳^۰$  ثانیه  $x$  برابر می شود پس باید بعد از ۱ دقیقه  $x \times x = x^۲$  برابر شود اما بعد از یک دقیقه دو برابر فشار داریم یعنی  $x^۲ = ۲$  و لذا  $x = \sqrt{۲}$ . حال کل زمان دو نیم دقیقه شامل ۵ زمان  $۳^۰$  ثانیه است پس فشار می شود  $x^۵$  یعنی  $a = x^۵ = \sqrt{۲^۵}$ . بعبارت بهتر باید داشته باشیم

$$۲^{\frac{۵}{۲}} = \sqrt{۲^۵}$$

**تعریف ۳.۳.** فرض کنید  $a$  عددی حقیقی باشد. اگر  $m, n \in \mathbb{N}$  باشند تعریف می‌کنیم:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

**مثال ۱۲.۳.** حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

۱)  $(-8)^{\frac{1}{3}} =$

۲)  $8^{\frac{2}{3}} =$

۳)  $(32)^{-\frac{2}{5}} =$

۴)  $(-8)^{\frac{4}{3}} =$

۵)  $\sqrt{\frac{\sqrt[3]{x} \sqrt[5]{y^2}}{\sqrt[6]{z^4}}} =$

۶)  $(0.25)^{\frac{3}{2}} =$

۷)  $\sqrt[5]{2} \sqrt[3]{\sqrt{8}} + (\sqrt[5]{\sqrt{2}})^3 - 2^{0.3} - 8^{0.1} =$

**تمرین ۲.۳.** درستی روابط حاکم بر اعداد تواندار که قبلا در مورد توان های صحیح گفته شده را در مورد توان های گویا تحقیق کنید. بعنوان نمونه

$$\begin{aligned} a^r \times a^s &= a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} \times \sqrt[q]{a^p} \\ &= \sqrt[nq]{a^{mq}} \times \sqrt[nq]{a^{pn}} \\ &= \sqrt[nq]{a^{qm+pn}} \\ &= a^{\frac{pn+qm}{nq}} \\ &= a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}} \\ &= a^{r+s} \end{aligned}$$

**مثال ۱۳.۳.** آیا تساوی  $\sqrt{m\sqrt{a}} = \sqrt[n]{m\sqrt{a}}$  درست است؟ در مورد جواب بحث کنید.

**مثال ۱۴.۳.** هرگاه  $a > 1$  باشد ثابت کنید  $a^n < a^{n-1}$ . در حالی که  $0 < a < 1$  باشد چه حکمی می‌شود؟

**مثال ۱۵.۳.** آیا محاسبه زیر درست است؟

$$\sqrt[4]{(-3)^4} = [(-3)^4]^{\frac{1}{4}} = \left[(-3)^{\frac{1}{4}}\right]^4 = (-3)^{\frac{1}{4} \times 4} = (-3)^1 = -3$$

**مثال ۱۶.۳.** نیلوفر و کیوان هر کدام عبارت  $\sqrt[3]{a^2}$  را ساده کرده اند. جوابهای آنها بصورت زیر است. جواب کدام دقیق تر است؟ چرا؟

$$\text{راه حل کیوان} \rightarrow \sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3 \times 2]{a^2} = \sqrt[6]{a^2}$$

$$\text{راه حل نیلوفر} \rightarrow \sqrt[3]{a^2} = \begin{cases} \sqrt[3]{a} & a > 0 \\ \sqrt[3]{-a} & a < 0 \end{cases}$$

**مثال ۱۷.۳.** از رابطه  $(\frac{1}{p})^{2\alpha-3} = 4 \times 16^\alpha$  مقدار  $\alpha$  را بیابید.

**تمرین ۳.۳.** حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

$$۱) \left(\frac{3^3}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}$$

$$۲) \left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2 \times \sqrt{\frac{1}{xy}} \times \left(\sqrt[3]{\frac{y^2}{x^2}}\right)^{-1}$$

$$۳) \left(a^{\frac{5}{7}}\right)^{0.7} \div \left(d^{-\frac{1}{4}}\right)^{-\frac{2}{3}}$$

$$۴) \left(a^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{8}{5}} \times a^{\frac{1}{3}} \times y^{\frac{4}{5}}$$

$$۵) \left(\sqrt[3]{32}\sqrt[4]{16}\sqrt[5]{128} \div \sqrt[4]{1024}\sqrt[5]{256}\sqrt[3]{64}\right)^{-\frac{2}{5}}$$

$$۶) 0.27^{-\frac{1}{3}} - \left(-\frac{1}{6}\right)^{-2} + 256^{0.75}$$

$$۷) \frac{\sqrt{\frac{x}{y}\sqrt{\frac{y}{x}\sqrt{\frac{x}{y}}}}}{\sqrt{\frac{y}{x}\sqrt{\frac{x}{y}\sqrt{\frac{y}{x}}}}}$$

$$۸) \left(\frac{1}{3}\right)^{p+2} \cdot \sqrt{\frac{1}{27}} \geq 9 \rightarrow p = ?$$

### ۳.۳ عبارات های جبری

در این بخش به معرفی چند اتحاد جبری دیگر و استفاده از آنها در تجزیه عبارات های جبری می پردازیم. از کلاس نهم با اتحاد ها آشنا شده اید. یک تساوی که به ازای تمامی مقادیر متغیر موجود در آن تساوی درست باشد را یک اتحاد گوییم. به دو تساوی زیر دقت کنید.

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \quad (1.3)$$

$$x^2 - 5 = 4 \quad (2.3)$$

تساوی (۱.۳) به ازای تمامی مقادیر  $x, y$  درست است و لذا به آن اتحاد گوییم. در حالیکه تساوی (۲.۳) به ازای دو مقدار  $x = 3, x = -3$  درست است و لذا به آن معادله گوییم. از کلاس نهم با برخی اتحادها آشنا شده اید. در اینجا آن اتحادها را بازنویسی می کنیم.

$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$
$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$
$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$

حال آماده هستیم تا چند اتحاد جدید معرفی کنیم. اولین اتحاد، اتحاد مربع سه جمله ای است. یعنی هدف یافتن حاصل  $(x + y)^3$  است. به کمک اتحادهای بالا عبارت فوق را تا سرحد امکان ساده می کنیم.

$$\begin{aligned} (x + y)^3 &= (x + y)^2 \times (x + y) \\ &= (x^2 + 2xy + y^2) \times (x + y) \\ &= x^3 + x^2y + 2x^2y + 2xy^2 + y^2x + y^3 \\ &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \end{aligned}$$

بنابراین نتیجه حاصل بصورت زیر بدست می آید:

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

در نهایت اگر از  $xy$  در جملات دوم و سوم فاکتور بگیریم خواهیم داشت:

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$$

$$x^3 - y^3 = (x - y)^3 + 3xy(x - y)$$

**مثال ۱۸.۳.** به کمک آخرین رابطه عبارت های  $x^3 + y^3$  و  $x^3 - y^3$  را تجزیه کنید.

نتیجه مثال بالا به قدری اهمیت دارد که به آنها اسم اتحاد مجموع و تفاضل مکعبات بدهیم:

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

**مثال ۱۹.۳.** حاصل عبارات زیر را به کمک اتحادها بدست آورید.

$$۱) (2x - y^2)^2 =$$

$$۲) \left(\frac{x}{4} - \frac{y}{3}\right)^2 =$$

$$۳) (x - y)(x + y)(x^2 + x^2y^2 + y^2) =$$

$$۴) (2x - 1)^3 =$$

$$۵) (1 + x^2 + x^4)(1 - x^2) =$$

$$۶) (101)^3 =$$

$$۷) \left(x - \frac{1}{y}\right)(8x^2 + 2)(2x + 1) =$$

$$۸) (x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2) - 8y^3 =$$

$$۹) \frac{(x + 1)^3 - 3(x + 1)^2 + 3(x + 1) - 1}{(x + 1)^2 - 2(x + 1) + 1}$$

$$۱۰) (x - 1)(x^2 + x + 1)(x^3 + 1)$$

$$۱۱) (2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2)(8x^3 + y^3) \quad ۱۲) (a - b - c)^2 - (a - b + c)^2$$

**مثال ۲۰.۳.** فرض کنید  $x + \frac{1}{x} = \sqrt{5}$  باشد. حاصل عددی عبارات زیر را بدست آورید.

$$۱) x^2 + \frac{1}{x^2} =$$

$$۲) x^3 + \frac{1}{x^3} =$$

$$۳) x^2 - \frac{1}{x^2} =$$

$$۴) x^3 - \frac{1}{x^3} =$$

$$۵) x^4 + \frac{1}{x^4} =$$

**مثال ۲۱.۳.** به کمک اتحادها عبارات زیر را تجزیه کنید.

$$۱) x^6 - y^6 =$$

$$۲) x^3 - ۱۲۵$$

$$۳) ۲۷x^3 + ۱$$

$$۴) ۴a^2 - b^2 - ۲b + ۴a =$$

$$۵) ۹x^2 - ۳x - ۲ =$$

$$۶) x^3 - x^2 - x + ۱ =$$

$$۷) a^4 - ۲a^2 + ۴۹ =$$

$$۸) x^2y^2 - x^2y^3 - ۱ + y =$$

$$۹) ۶۴x^3 - ۴۸x^2 + ۱۲x - ۱ =$$

$$۱۰) ۴a^4 - ۶۴ =$$

$$۱۱) (x + ۱)^3 + ۸ =$$

$$۱۲) x^5 + x + ۱ = \quad (\text{hint : } x^2 - x^2)$$

$$۱۳) ۴x^4 + ۱$$

$$۱۴) ۸x^3 - ۱۲x^2 + ۶x - ۱ =$$

تمرین ۴.۳. به کمک اتحادها حاصل عبارات زیر را بیابید.

$$۱) (x - ۲y^۲)^۲ - (x + ۲y^۲)^۲$$

$$۲) \left(\frac{۳}{۴}xy - \frac{۱}{۴}y\right)^۲$$

$$۳) (۲m - n)(۴m^۲ + ۲mn + n^۲)$$

$$۴) (x + ۲y)(x^۲ - ۲xy + ۴y^۲)$$

$$۵) (۲ + x)(۴ - ۲x + x^۲)(۸ - x^۳)$$

$$۶) (x - y)^۳ - (x + y)^۳$$

$$۷) (۲x - y)(۴x^۲ + y^۲)(۲x + y) + y^۴$$

$$۸) (a - b + c)(a - b - c)$$

تمرین ۵.۳. تجزیه کنید.

$$۱) ab - a^۲b^۲$$

$$۲) a + b + a^۲ - b^۲$$

$$۳) a^۲ - b^۲ + a^۳ - b^۳$$

$$۴) x^۶ - (yz)^۶$$

$$۵) ۳۶a^۴b - ۱۶b^۵$$

$$۶) a^۲c^۲ + b^۲d^۲ - b^۲c^۲ - a^۲d^۲ - ۴abcd$$

$$۷) c^۶ + p^۶$$

$$۸) x^۳ + ۶۴m^۳$$

$$۹) (a + b)^۳ - (a - b)^۳ - ۲b$$

$$۱۰) (a + b)^۳ + (a - b)^۳ - ۳a$$

### کاربرد تجزیه در یافتن ب م م و ک م م چندجمله‌ایها

یک چندجمله‌ای مثل  $a + b$  را در نظر بگیرید. اگر این دو جمله‌ای را در اعداد صحیح یا هر چندجمله‌ای دیگری ضرب کنیم، حاصل را مضربی از  $a + b$  گوئیم. پس عبارات زیر همگی مضارب  $a + b$  هستند.

$$۲(a + b), (a^۲ - b^۲), (a^۳ - b^۳) \dots$$

همچنین عبارت  $a + b$  مقسوم علیه مشترک هر سه عبارت فوق است. بطور کلی برای یافتن بزرگترین مقسوم علیه مشترک و کوچکترین مضرب مشترک دو عبارت جبری ابتدا آنها را تجزیه کرده و سپس برای ب م م و ک م م عوامل مشترک با کمترین توان در تجزیه را منظور می‌کنیم و برای ک م م هم عوامل مشترک را با بزرگترین توان در عوامل غیرمشترک ضرب می‌کنیم. به عنوان یک مثال ساده فرض کنید هدف یافتن ب م م و ک م م دو عبارت جبری  $a^۲ - b^۲$ ،  $a^۳ - b^۳$  است. با تجزیه کردن آنها داریم:

$$\begin{cases} a^۲ - b^۲ = (a - b)(a + b) \\ a^۳ - b^۳ = (a - b)(a^۲ + ab + b^۲) \end{cases}$$



پس با این حساب ب م م برابر  $a - b$  است و ک م م برابر  $(a^2 + ab + b^2)(a + b)(a - b)$  . یکی از فواید محاسبه ک م م در مخرج مشترک گرفتن برای جمع و تفریق عبارات گویاست. در قسمت بعد عبارات گویا را بررسی می‌کنیم.

## عبارات گویا

**تعریف ۴.۳.** منظور از یک عبارت گویا عبارتی است که صورت و مخرج آن چندجمله‌ای باشند. اگر  $p(x)$  ,  $q(x)$  دو چندجمله‌ای باشند عبارت

$$\frac{p(x)}{q(x)}$$

را یک عبارت گویا گوئیم. شرط تعریف چنین عبارتی آنست که  $q(x) \neq 0$  باشد.

**مثال ۲.۲.۳.** معین کنید هر عبارت گویا به ازای چه مقادیری از متغیرش تعریف شده است؟ (دامنه‌ی تعریف آن را بیابید)

$$۱) f(x) = \frac{x + ۱}{x - ۳}$$

$$۲) g(x) = \frac{۳y}{y^2 - ۴}$$

$$۳) h(x) = \frac{x^2 + ۱}{x^4 + ۱}$$

$$۴) k(x) = \frac{z}{۲z^2 - ۷z + ۵}$$

$$۵) l(x) = \frac{x}{x}$$

$$۶) u(x) = \frac{۳}{۲x^2 + ۲x} + \frac{۲x - ۱}{x^2 - ۱} - \frac{۲}{x}$$

**مثال ۲۳.۳.** عملیات‌های خواسته شده بر عبارات گویا را انجام دهید. اگر تنها یک کسر در صورت مسئله است هدف ساده کردن آن است.

$$۱) \frac{۶x^۲ + ۷x - ۳}{۲x^۲ - x - ۶}$$

$$۲) \frac{۱۳}{۲x - ۶} - \frac{۲x}{x^۲ - ۹}$$

$$۳) \frac{x^۲ - y^۲}{x^۲ + y^۲} \div (x + y)$$

$$۴) \frac{m^۳ - n^۳}{(mn - n^۲)^۲} \div \frac{mn + m^۲}{m^۲ - n^۲}$$

$$۵) a \div \frac{a - ۱}{۲} - \frac{a^۳ + ۳a(a - ۱) - ۱}{۲a^۲ + ۲a} \times \frac{-۴a}{a^۲ - ۲a + ۱} - \frac{۴a^۲}{a^۲ - ۱}$$

$$۶) \left( \frac{n}{m - n} + \frac{m}{m + n} \right) \left( \frac{m + n}{m^۲ + n^۲} \right) \left( \frac{m - n}{m + n} \right)$$

### حذف رادیکال از عبارات جبری

در اتحاد  $a^۳ - b^۳ = (a - b)(a^۲ + ab + b^۲)$  اگر قرار دهیم  $b = ۱$  ,  $a = \sqrt[۳]{x}$  آنگاه:

$$(\sqrt[۳]{x})^۳ - ۱ = \underbrace{(x - ۱)}_{\text{بدون رادیکال}} = \underbrace{(\sqrt[۳]{x} - ۱)(\sqrt[۳]{x^۲} + \sqrt[۳]{x} + ۱)}_{\text{عبارت شامل رادیکال‌ها}}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید با ضرب دو عبارت در هم حاصل یک عبارت فارغ از رادیکال است. این کار اغلب به گویا کردن معروف است و یک دلیل ساده این کار این است که کلا کار با چندجمله‌ایها و عملیات بر آنها بسیار ساده تر از کار با عبارات رادیکالی است. بویژه زمانی که عبارت رادیکالی در مخرج باشد، از بین بردن رادیکال آن امری مستحب است. به عنوان مثال ساده مخرج عبارت  $\frac{۱}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$  را گویا می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \frac{۱}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} &= \frac{۱}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \times \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \\ &= \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \\ &= \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x - y} \end{aligned}$$

مثال ۲۴.۳. مخرج کسره‌های زیر را گویا کنید.

$$۱) \frac{۱}{\sqrt{x}\sqrt[۳]{y}}$$

$$۲) \frac{۱}{\sqrt{x}-۲}$$

$$۳) \frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}-\sqrt{x}+۱}$$

$$۴) \frac{۱}{a^{\frac{۱}{۲}}+a^{\frac{۱}{۳}}b^{\frac{۱}{۳}}+b^{\frac{۱}{۲}}}$$

$$۵) \frac{a-۱}{\sqrt{a-۱}-\sqrt{a+۲}}$$

$$۶) \frac{۱}{\sqrt[۳]{x}+۱}$$

$$۷) \frac{۱}{۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}$$

## تمرینات تکمیلی

تمرین ۶.۳. حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

$$۱) \left(\frac{1}{6}x^{-1}y^3\right)^{-2} \cdot \left(\frac{x^2}{y^2}\right)^{-2} \cdot \left(-\frac{2x^2}{y^3}\right)^{-4}$$

$$۲) ۱۲۵ \leq \left(\frac{1}{5}\right)^p \leq ۳۱۲۵ \rightarrow p = ?$$

$$۳) ۱۰^{۲۰} \square ۲۰^{۱۰}$$

$$۴) ۲۰ \cdot ۲^{۳۰۳} \square ۳۰ \cdot ۳^{۲۰۲}$$

$$۵) \frac{\sqrt{۳۲}}{\sqrt{۸}} \times \frac{\sqrt[۴]{۳}}{\sqrt[۴]{۴۸}}$$

$$۶) \left(۲۷^{\frac{1}{3}} \times ۸^{\frac{2}{3}} \times ۳۲^{\frac{2}{5}} \times ۸۱^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$۷) (۴ + \sqrt{۱۵})(\sqrt{۱۰} - \sqrt{۶})(\sqrt{۴} - \sqrt{۱۵})$$

$$۸) \sqrt{۱۷ - ۴\sqrt{۹} + ۴\sqrt{۵}}$$

تمرین ۷.۳. عبارت‌هایی که بصورت مجموع چند جمله‌اند را تجزیه کنید و آنهایی که بصورت حاصلضرب چند پرانتز هستند به کمک اتحادها ضرب کرده و ساده کنید. عملیات بر عبارات گویا را نیز انجام دهید.

$$۱) (1 + x + x^2)(1 - x)(1 + x)(1 - x + x^2)$$

$$۲) p^4 - 6p^2q + 9q^2$$

$$۳) x^3y^3 + 6x^2y^2 + 12xy + 8$$

$$۴) (x + 3z - y)(x - y - 3z)$$

$$۵) (a^6 - 3a^3 + 9)(a^3 + 3)$$

$$۶) x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

$$۷) 2 - b^3y^3 - by$$

$$۸) x^3 - 8 + (x + 2)^2 - 2x$$

$$۹) 8 - 2x - x^2$$

$$۱۰) \frac{3x^2 + 12x + 9}{x^6 + 5x^3 + 6}$$

$$۱۱) \frac{a^2 - 1}{a} \times \frac{a^3}{a - 1} \times \frac{1}{a + 1}$$

$$۱۲) \left(\frac{x^2}{x - y} - y\right) \left(x + \frac{y^2}{x + y}\right)^{-1}$$

$$\frac{x + 1}{yz + 1}$$

$$۱۳) \frac{1}{a^2 + 3a + 2} + \frac{2a}{a^2 + 4a + 3} + \frac{1}{a^2 + 5a + 6}$$

$$۱۴) \frac{y}{x + z} - \frac{1}{y(xyz + x + z)}$$

$$\frac{y}{yz + 1}$$

$$۱۵) \frac{1}{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}, \text{ گویا کنید}$$

$$۱۶) \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}$$

$$۱۷) \frac{1}{\sqrt[3]{x} - \sqrt{y}}$$

$$۱۸) \frac{1}{1 + \sqrt{5} - \sqrt{3}}$$

## ۴.۳ تست‌های فصل سوم

۱- اگر  $x + y = 7$  و  $xy = 5$  باشد، حاصل  $x^3 + y^3$  کدام است؟

- (۱) ۲۱۶ (۲) ۲۳۸ (۳) ۲۴۴ (۴) ۲۶۴

۲- در تجزیه‌ی عبارت  $(x^2 - 6x - 4) - 144$  کدام عامل ضرب وجود ندارد؟

- (۱)  $x - 8$  (۲)  $x - 4$  (۳)  $x + 2$  (۴)  $x + 4$

۳- حاصل  $\sqrt{\frac{19}{6} + \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{4}}}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{3}$  (۲)  $\frac{1}{6}$  (۳) ۱ (۴) ۲

۴- کوچک‌ترین مضرب مشترک دو چندجمله‌ای  $x^2 - 10x + 21$  و  $x^2 - 12x + 35$  را بر بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک آن‌ها تقسیم کرده‌ایم، حاصل تقسیم کدام است؟

- (۱)  $x^2 - 8x - 15$  (۲)  $x^2 - 8x + 15$  (۳)  $x^2 + 8x + 15$  (۴)  $x^2 + 8x - 15$

۵- حاصل عبارت  $(\sqrt{\frac{3}{4}} - \sqrt{\frac{3}{9}})\sqrt{\frac{6}{5}}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{10}$  (۲)  $\frac{1}{15}$  (۳)  $\frac{1}{20}$  (۴)  $\frac{1}{30}$

۶- به ازای چه مقدار  $m$ ، عبارت  $4x^2 - 6x + m$  مربع کامل است؟

- (۱)  $\frac{4}{9}$  (۲)  $\frac{9}{4}$  (۳)  $\frac{2}{3}$  (۴)  $\frac{3}{2}$

۷- حاصل  $1001^2 - 999^2$  کدام است؟

- (۱) ۱۰۰۰ (۲) ۲۰۰۰ (۳) ۴۰۰۰ (۴) ۶۰۰۰

۸- در تجزیه‌ی عبارت  $3 - 2b - 2a - b^2 - 2a - 2a$  کدام عامل وجود دارد؟

- (۱)  $2a + b + 3$  (۲)  $2a - b + 1$  (۳)  $2a + b - 3$  (۴)  $2a + b + 1$

۹- حاصل عبارت  $(x - 1)(x^2 + x + 1)(x^3 + 1)$  کدام است؟

- (۱)  $(x - 1)^2$  (۲)  $(x - 1)^3(x^3 + 1)$  (۳)  $x^3 - 1$  (۴)  $x^6 - 1$

۱۰- مجموع ریشه‌های معادله‌ی  $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$  کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) -۳

۱۱- اگر عبارت  $4x^2 - 3x + A$  مربع دو جمله‌ای باشد،  $A$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{3}{2}$  (۲)  $\frac{3}{4}$  (۳)  $\frac{9}{4}$  (۴)  $\frac{9}{16}$

۱۲- اگر  $x = 4$  باشد، حاصل  $\sqrt{(-x)^2} + \sqrt[4]{(1-x)^4}$  کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) -۹ (۳) ۷ (۴) -۷

۱۳- اگر عبارت  $4x^2 - 3x + A$  مربع دو جمله‌ای باشد،  $A$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{3}{2}$  (۲)  $\frac{3}{4}$  (۳)  $\frac{9}{4}$  (۴)  $\frac{9}{16}$

۱۴- عبارت  $6x^2 - 5x - 6$  بر کدام عبارت زیر بخش پذیر است؟

- (۱)  $3x - 2$  (۲)  $2x + 3$  (۳)  $2x - 3$  (۴)  $3x + 4$

۱۵- عبارت  $x^3 + 5x^2 - 4x - 20$  بر کدام دو جمله‌ای بخش پذیر نیست؟

- (۱)  $x - 2$  (۲)  $x + 2$  (۳)  $x - 5$  (۴)  $x + 5$

۱۶- در کدام گزینه فاکتورگیری درست انجام نشده است؟

(۱)  $3x^2a + 9a^2x = 3ax(x + 3a)$

(۲)  $49x^2yz + 14x^3y^2 = 7x^2y(7z + 2xy)$

(۳)  $19xab + 38a^2x + 2xa = 19xa(b + 2a + 2)$

(۴)  $18x^2ab + 15x^3a + 3x^2a = 3x^2a(6b + 5x + 1)$

۱۷- اگر  $(a > 1)$ ،  $a - \frac{1}{a} = \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}$  باشد، حاصل  $a + \frac{1}{a}$  برابر کدام است؟

- (۱)  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$  (۲)  $\frac{4\sqrt{3}}{3}$  (۳) ۲ (۴) ۳

۱۸- ساده شده‌ی عبارت  $\sqrt{\sqrt{12} - \sqrt{3}} - \sqrt{3\sqrt{27}}$  کدام است؟

- (۱)  $-2\sqrt[4]{3}$  (۲)  $6\sqrt{3}$  (۳)  $\sqrt[4]{2}$  (۴)  $-3\sqrt{2}$

۱۹- حاصل عبارت  $\left(2\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2 - \frac{4}{x}\left(x^2 + \frac{1}{16}\right)$  کدام است؟ ( $x > 0$ )

- (۱) ۲      (۲) -۱      (۳) ۱      (۴) -۲

۲۰- اگر  $a + b = 3$  و  $ab = 2$  باشد، مقدار  $a^3 + b^3$  کدام است؟

- (۱) ۸      (۲) ۹      (۳) ۱۲      (۴) ۱۶

۲۱- عبارت  $(a^4 + 4a^2 + 16)(a + 2)(a - 2)$  با کدام عبارت زیر برابر است؟

- (۱)  $a^6 + 64$       (۲)  $(a^3 - 8)(a^3 + 8)$   
(۳)  $(a^3 - 4)(a^3 + 4)$       (۴)  $a^8 - 64$

۲۲- در تجزیه‌ی  $4a^4 - 64$  کدام عامل وجود ندارد؟

- (۱)  $a^2 + 4$       (۲)  $a + 2$       (۳)  $a - 2$       (۴)  $a^2 - 8$

۲۳- در تجزیه‌ی عبارت  $x^2 - 1 + (x - 1)(y + 1)$ ، کدام عامل وجود دارد؟

- (۱)  $x + y + 2$       (۲)  $x + y - 1$       (۳)  $x - y + 1$       (۴)  $x + y$

۲۴- کدام عامل در تجزیه‌ی عبارت  $3x^2 - 5x - 2$  وجود دارد؟

- (۱)  $3x - 1$       (۲)  $3x + 1$       (۳)  $x - 1$       (۴)  $x + 2$

۲۵- حاصل عبارت  $\sqrt[3]{3} + \sqrt{18} - \frac{(\sqrt[3]{24} - \sqrt{32})}{2}$  کدام است؟

- (۱)  $\sqrt{2}$       (۲)  $5\sqrt{2}$       (۳)  $-2\sqrt{3}$       (۴)  $2\sqrt{2} + \sqrt{3}$

۲۶- حاصل  $A = \frac{9}{\left(\sqrt{\sqrt[3]{\frac{1}{3}}}\right)}$  کدام است؟

- (۱)  $\sqrt[3]{3^7}$       (۲)  $3\sqrt[3]{3^7}$       (۳)  $3\sqrt[3]{3^8}$       (۴)  $9\sqrt[3]{3^7}$

۲۷- مقدار عبارت  $64x^3 - 48x^2 + 12x - 1$  به ازای  $x = \frac{1}{8}$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{2}{3}$       (۲)  $-\frac{1}{8}$       (۳)  $\frac{3}{5}$       (۴)  $\frac{1}{2}$

۲۸- در حالت کلی، کدام عامل زیر در تجزیه‌ی عبارت  $x^2y^2 - y^3x^2 - 1 + y$  وجود ندارد؟

(۱)  $1 - y$  (۲)  $1 + y$  (۳)  $xy - 1$  (۴)  $xy + 1$

۲۹- در تجزیه‌ی عبارت  $25x^2 - 25x - 14$  همواره کدام‌یک از عامل‌های زیر وجود دارد؟

(۱)  $5x + 1$  (۲)  $5x + 14$  (۳)  $5x - 2$  (۴)  $5x - 7$

۳۰- در تجزیه‌ی عبارت  $x^2 + (x - 1)^2 - x$  همواره کدام عامل زیر وجود دارد؟

(۱)  $2x - 1$  (۲)  $2x + 1$  (۳)  $x + 1$  (۴)  $2x$

۳۱- در تجزیه‌ی عبارت  $x^4 - 3x^3 + 8x - 24$  کدام عامل ضرب وجود دارد؟

(۱)  $x - 4$  (۲)  $x - 2$  (۳)  $x + 2$  (۴)  $x + 3$

۳۲- مقدار  $x$  در تساوی  $\sqrt[4]{x\sqrt[3]{x\sqrt{x}}} = \sqrt[4]{8}$  کدام است؟

(۱)  $\sqrt[3]{2}$  (۲)  $2$  (۳)  $\sqrt[3]{4}$  (۴)  $4$

۳۳- حاصل  $(\sqrt{32} + \sqrt[3]{32} - \sqrt{50})^{13}$  کدام است؟

(۱)  $(2\sqrt{2})^{13}$  (۲)  $(\sqrt{2})^{13}$  (۳)  $1$  (۴) صفر

۳۴- اگر  $x + \frac{1}{x} = 4$  باشد، حاصل  $(x - \frac{1}{x})^2$  کدام است؟

(۱)  $12$  (۲)  $14$  (۳)  $16$  (۴)  $10$

۳۵- عبارت  $6x^3 + 7x^2 + 2x$  را تجزیه نموده‌ایم. یکی از عوامل تجزیه همواره کدام است؟

(۱)  $3x + 2$  (۲)  $2x - 1$  (۳)  $x + 2$  (۴)  $2x + 3$

۳۶- اگر  $(a - 3)(a + 4) = 18$  باشد، مقدار  $a(a + 4)$  کدام می‌تواند باشد؟

(۱)  $-45$  (۲)  $12$  (۳)  $21$  (۴)  $32$

۳۷- حاصل  $3\sqrt{32} - \frac{1}{4}\sqrt{200} + \sqrt{8}$  کدام است؟

(۱)  $9\sqrt{2}$  (۲)  $8\sqrt{2}$  (۳)  $7\sqrt{2}$  (۴)  $6\sqrt{2}$

۳۸- در تجزیه‌ی عبارت  $2x^2 - 5x - 3$  کدام دوجمله‌ای وجود دارد؟

(۱)  $x + 3$  (۲)  $2x + 1$  (۳)  $x - 1$  (۴)  $3x + 1$



۳۹- حاصل  $998 \times 1002$  را با استفاده از کدام اتحاد می‌توان به سهولت محاسبه نمود؟

(۱)  $(a + b)^2$  (۲)  $(a - b)^2$  (۳)  $(a + b)(a - b)$  (۴)  $(x + a)(x + b)$

۴۰- کسر  $\frac{4}{\sqrt[3]{8}}$  با کدام عدد زیر برابر است؟

(۱)  $2\sqrt[3]{2}$  (۲)  $\sqrt[3]{2}$  (۳)  $4\sqrt[3]{2}$  (۴)  $2\sqrt[3]{4}$

۴۱- در حاصل عبارت  $(2x^2 - 3x - 2)^2$  ضریب  $x^3$  کدام است؟

(۱) ۶ (۲) -۶ (۳) ۱۲ (۴) -۱۲

۴۲- عبارت  $6x^2 - 5x - 6$  بر کدام عبارت زیر بخش پذیر است؟

(۱)  $3x - 1$  (۲)  $2x + 3$  (۳)  $3x + 2$  (۴)  $2x - 1$

۴۳- با افزودن کدام عدد به عبارت  $4x^2 - 6x + \frac{1}{4}$  مربع یک دوجمله‌ای حاصل می‌شود؟

(۱) ۲ (۲)  $\frac{15}{4}$  (۳) ۶ (۴) ۱۲

۴۴- حاصل عبارت  $\sqrt{6}(\sqrt{2} - \sqrt{3}) + \sqrt{50} - \frac{6}{\sqrt{3}}$  برابر کدام است؟

(۱)  $\sqrt{3}$  (۲)  $\sqrt{6}$  (۳)  $\sqrt{8}$  (۴)  $\sqrt{12}$

۴۵- در تجزیه عبارت  $a(a - 3)(a - 4) - 12a + 36$  کدام عامل ضرب وجود ندارد؟

(۱)  $a - 6$  (۲)  $a - 3$  (۳)  $a - 2$  (۴)  $a + 2$

۴۶- حاصل عبارت  $\sqrt{2}(\sqrt{50} - \sqrt[3]{4}) + 8^{-\frac{2}{3}}$  کدام است؟

(۱)  $\frac{33}{4}$  (۲)  $\frac{29}{4}$  (۳)  $\frac{33}{2}$  (۴)  $\frac{25}{2}$

۴۷- حاصل  $\frac{4\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{300}}{\sqrt{3}}$  کدام است؟

(۱) ۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) صفر

$$A = \frac{\sqrt[3]{24} - \sqrt[3]{128}}{\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{2}} \times \left( \sqrt{(32)^{-1}} \right)$$

۴۸- ساده شدهی عبارت A کدام است؟

$$\frac{\sqrt{2}}{4} \quad (۴)$$

$$-\sqrt{2} \quad (۳)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (۲)$$

$$\sqrt{2} \quad (۱)$$

۴۹- کدام عامل زیر در تجزیهی هر دو عبارت  $9x^2 - 3x - 2$  و  $18x^2 + 12x + 2$ ، به طور مشترک، وجود دارد؟

$$3x - 1 \quad (۴)$$

$$3x + 1 \quad (۳)$$

$$3x + 2 \quad (۲)$$

$$3x - 3 \quad (۱)$$

۵۰- اگر  $A = (2 - \sqrt{3})(7 + 4\sqrt{3})$  و  $B = \sqrt{27} + 5$  باشند، حاصل  $\frac{2A}{B} + 1$  کدام است؟

$$1 + \sqrt{3} \quad (۴)$$

$$1 - \sqrt{3} \quad (۳)$$

$$2\sqrt{3} \quad (۲)$$

$$\sqrt{3} \quad (۱)$$

## ۵.۳ کلید تست‌های فصل سوم

۴	۳	۲	۱		۴	۳	۲	۱	
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۳۷	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۸	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۹	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۴۰	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۱	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۵
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۲	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۶
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۴۳	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۷
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۴	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۸
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۵	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۹
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۴۶	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۱۰
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۷	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۱
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۸	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۲
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۴۹	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۳
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۵۰	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۴
					<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۵
					<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۶
					<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۷
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۱۸
					<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۱۹
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۰
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۱
					<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۲
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۲۳
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۴
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۵
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۶
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۷
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۸
					<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۲۹
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۳۰
					<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۱
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۲
					<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۳
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۳۴
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	- ۳۵
					<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	- ۳۶