



# آزمون غیر حضوری دوازدهم ریاضی (۲۰ مهر ۱۳۹۷) (مباحث ۴ آبان ۹۷)

برای دیدن پاسخ آزمون غیرمضوری به صفحه مقطع و همچنین به صفحه شفصی خود در قسمت دریافت کارنامه در سایت کانون به آدرس [www.kanoon.ir](http://www.kanoon.ir) مراجعه نمائید و از منوی سمت راست گزینه آزمون غیرمضوری را انتخاب کنید.

گروه فنی و تولید:

مسئول تولید آزمون غیرحضوری	محمد اکبری
مسئول دفترچه آزمون غیرحضوری	نرگس غنی‌زاده
گروه مستندسازی	مدیر گروه: مریم صالحی مسئول دفترچه: آتیه اسفندیاری
حروف‌نگار و صفحه‌آرا	حسن خرم‌جو
ناظر چاپ	سوران نعیمی

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی «وقف عام»

دفتر مرکزی: خیابان انقلاب بین صبا و فلسطین - پلاک ۹۲۳ - تلفن: ۶۶۹۶۲۴۰۰

«تمام دارایی‌ها و درآمدهای بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی وقف عام است بر گسترش دانش و آموزش»

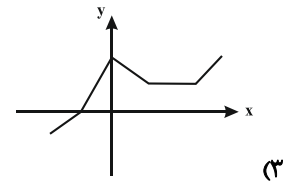
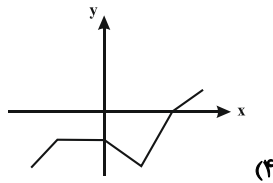
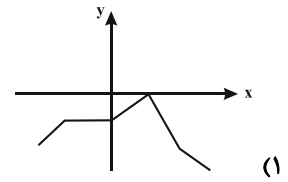
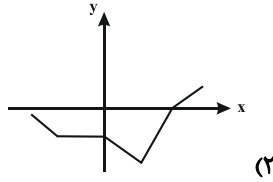
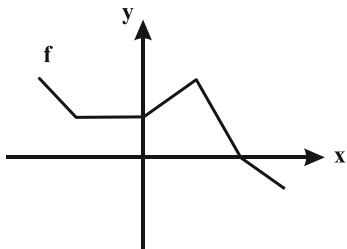
حسابان ۲

حسابان ۲

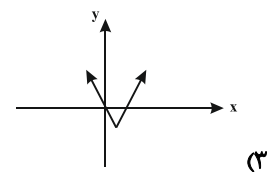
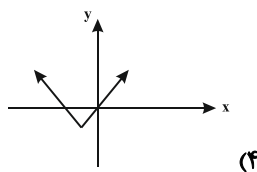
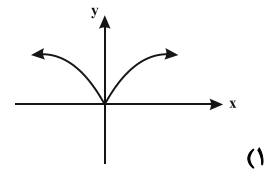
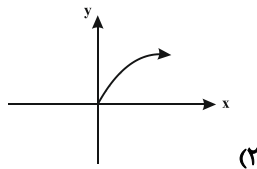
تابع

صفحه‌های ۱ تا ۱۸

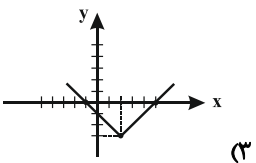
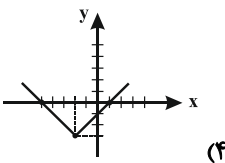
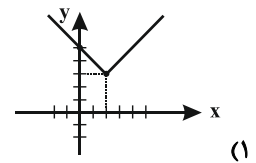
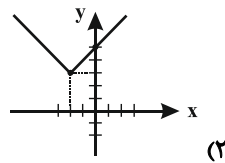
۱- اگر نمودار تابع  $f$  به صورت زیر باشد، نمودار تابع  $-f$  کدام است؟



۲- نمودار تابع  $y = \sqrt{4x^2 - 4x + 1} - 1$  کدام است؟



۳- نقطه  $(x_0 - 2, y_0 + 3)$  از نمودار تابع  $g$ ، متناظر با نقطه  $(x_0, y_0)$  از نمودار تابع  $f(x) = |x|$  است. نمودار تابع  $g$  کدام است؟



۴- اگر نمودار تابع  $f(x) = \frac{1}{x}$  را ابتدا در راستای محور  $x$  ها یک واحد به سمت راست انتقال دهیم و سپس نسبت به محور  $y$  ها و

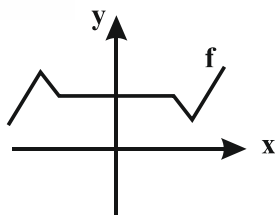
$x$  ها منعکس کنیم، نمودار حاصل مربوط به کدام تابع خواهد بود؟

(۱)  $y = \frac{1}{x-1}$

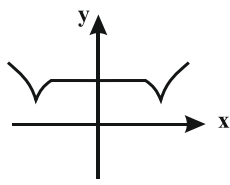
(۲)  $y = \frac{-1}{x+1}$

(۳)  $y = \frac{1}{1+x}$

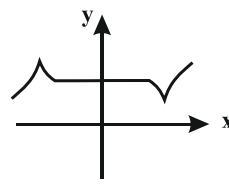
(۴)  $y = \frac{1}{1-x}$



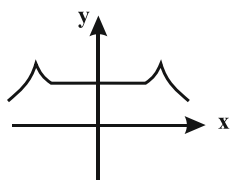
۵- اگر نمودار تابع  $f$  به صورت روبه‌رو باشد، نمودار تابع  $y = \frac{f}{f+1}$  کدام می‌تواند باشد؟



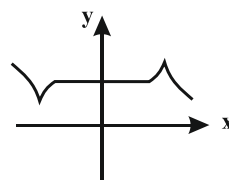
(۲)



(۱)



(۴)



(۳)

۶- طول بیشترین بازه‌ای که در آن تابع  $f(x) = \begin{cases} 2x^2 & x \geq -1 \\ 2 & x < -1 \end{cases}$  اکیداً نزولی است، کدام است؟

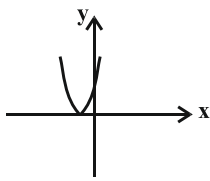
۱ (۴)

۲ (۳)

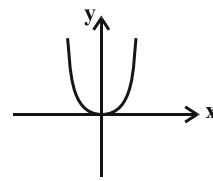
$\frac{1}{2}$  (۲)

$\frac{3}{2}$  (۱)

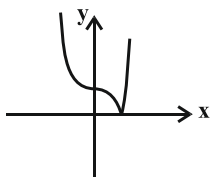
۷- نمودار تابع  $f(x) = |-x^3 + 1|$  کدام است؟



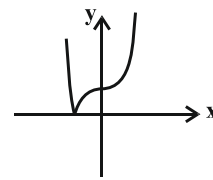
(۲)



(۱)



(۴)



(۳)

۸- تابع  $f(x) = (x+2)|x-1|$  در کدام بازه نزولی است؟

$[-\frac{1}{2}, 1]$  (۴)

$[-2, \frac{1}{2}]$  (۳)

$[1, 2]$  (۲)

$[-1, 1]$  (۱)

۹- تابع  $y = \left| \frac{x}{|x|} - x \right|$  در کدام یک از فاصله‌های زیر اکیداً نزولی است؟

$(-2, -\frac{1}{2})$  (۴)

$(1/5, 2/5)$  (۳)

$(0, 1)$  (۲)

$(-1, 0)$  (۱)

۱۰- ضابطه معکوس تابع  $f(x) = |x^2 - 2x|$  در بزرگ‌ترین بازه‌ای که  $f$  صعودی است، کدام است؟

$x \geq 1, 1 - \sqrt{x-1}$  (۲)

$x \geq 0, 1 - \sqrt{1+x}$  (۱)

$x \leq 1, 1 + \sqrt{1-x}$  (۴)

$x \geq 0, 1 + \sqrt{1+x}$  (۳)



## هندسه ۳

## هندسه ۳

ماتریس و کاربردها  
صفحه‌های ۹ تا ۲۳

۱۱- دو ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$  داده شده‌اند. اگر  $(A+B)^2 + C = A$  باشد، آنگاه

ماتریس  $C$  کدام است؟

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (4)$$

۱۲- اگر  $A = [a_{ij}]$ ،  $B = [b_{ij}]$  دو ماتریس  $3 \times 3$  با این ویژگی باشند، که  $a_{ij} = \begin{cases} 1 & : i+j=2k \\ 0 & : i+j=2k+1 \end{cases}$  و  $b_{ij} = \begin{cases} 1 & : i \leq j \\ 0 & : i > j \end{cases}$ ، آنگاه

سطراول ماتریس  $(A-B)^2$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

۱۳- اگر  $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ، آنگاه  $A^{20} + A^{20} + A^6$  با کدام یک از ماتریس‌های زیر برابر است؟

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

۱۴- اگر  $A = \begin{bmatrix} \tan x & -1 \\ \frac{1}{\cos^2 x} & -\tan x \end{bmatrix}$ ، آنگاه حاصل  $A^3 + A^2 + A^6$  کدام است؟ ( $x \neq \frac{k\pi}{2}$ )

$$I \quad (1)$$

$$-I \quad (2)$$

$$3I \quad (3)$$

$$-3I \quad (4)$$

۱۵- اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  و  $B_{2 \times 2}$ ، دو ماتریس باشند به طوری که حاصل ضرب  $A$  و  $B$ ، خاصیت جابه‌جایی داشته باشد، آنگاه مجموع

درایه‌های روی قطر فرعی ماتریس  $B$  کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۱

(۳) نامشخص (۴) -۱

۱۶- اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$  باشد، مجموع درایه‌های ستون اول  $A^5$  کدام است؟

(۱) ۳۲۴ (۲) ۱۲۴

(۳) ۲۴۳ (۴) ۴۲۳

۱۷- اگر ماتریس  $A = \begin{bmatrix} a+2 & a \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$  وارون‌پذیر نباشد و  $B = \begin{bmatrix} a+1 & 2 \\ -8 & -a+1 \end{bmatrix}$ ، آنگاه مجموع درایه‌های  $B^{-1}$  کدام است؟

(۱) -۵ (۲) -۶

(۳) ۷ (۴) ۸

۱۸- اگر  $A^3 = \bar{O}$  باشد، آنگاه  $(A+I)^{-1}$  برابر است با:

(۱)  $A^2 + A + I$  (۲)  $-A^2 - A - I$

(۳)  $A^2 - A + I$  (۴)  $-A^2 + A - I$

۱۹- اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 9 & 6 & 10 \end{bmatrix}$ ،  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ ، و  $C = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 9 \end{bmatrix}$  باشد، آنگاه درایه‌ی مربوط به سطر دوم و

ستون اول ماتریس  $D$  کدام است؟

(۱) ۱۷ (۲) -۱۴ (۳) ۲۲ (۴) -۴

۲۰- اگر  $A$  یک ماتریس مربعی  $n \times n$  و  $B = I_n - A$ ، ماتریس  $A^2 + AB + B$  همواره برابر کدام است؟

(۱)  $A$  (۲)  $B$

(۳)  $AB$  (۴)  $I_n$



## ریاضیات گسسته

## ریاضیات گسسته

## آشنایی با نظریه اعداد

صفحه‌های ۱ تا ۱۷

۲۱- اگر  $p$  و  $q$  دو عدد طبیعی باشند به طوری که  $p^3 = 2q^3$ ، آنگاه چند مقدار برای زوج مرتب  $(q, p)$

وجود دارد؟

(۱) هیچ (۲) ۲

(۳) ۴ (۴) ۸

۲۲- کوچک ترین عضو مجموعه  $A = \{5328 - 12q \geq 0 \mid q \in \mathbb{Z}\}$  کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲

(۳) ۳ (۴) صفر

۲۳- اگر  $a, b$  و  $c$  سه عدد طبیعی باشند به طوری که  $a \mid b + c$  و  $b \mid a$ ، آنگاه کدام گزینه همواره درست است؟

(۱)  $b \mid c$  (۲)  $c \mid b$ (۳)  $a \mid c$  (۴)  $c \mid a$ 

۲۴- در یک عمل تقسیم، مقسوم علیه برابر ۱۴۹ و باقی مانده تقسیم، ۷ برابر مربع خارج قسمت است. مجموع ارقام بزرگ ترین عدد

برای مقسوم کدام است؟

(۱) ۹ (۲) ۱۲

(۳) ۱۵ (۴) ۱۸

۲۵- اگر باقیمانده تقسیم عدد  $a$  بر ۳ و ۷ به ترتیب برابر ۱ و ۵ باشد، آنگاه باقیمانده تقسیم عدد  $a$  بر ۲۱ کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۵

(۳) ۱۶ (۴) ۱۹



۲۶- کدام یک از مجموعه‌های زیر نسبت به عمل ضرب بسته است؟ (حاصل ضرب هر دو عضو دلخواه آن به همان مجموعه تعلق دارد).

$$A = \{4k + 3 \mid k \in \mathbb{Z}\} \quad (1) \quad B = \{4k - 3 \mid k \in \mathbb{Z}\} \quad (2)$$

$$C = \{5k - 3 \mid k \in \mathbb{Z}\} \quad (3) \quad D = \{6k + 5 \mid k \in \mathbb{Z}\} \quad (4)$$

۲۷- اگر  $a - b \mid a + b$ ، آنگاه کدام نتیجه‌گیری در حالت کلی نمی‌تواند درست باشد؟ ( $a, b \in \mathbb{Z}$ )

$$a - b \mid 3a - b \quad (2) \quad a - b \mid 4a - 2b \quad (1)$$

$$a - b \mid 4a + b \quad (4) \quad a - b \mid 3b - a \quad (3)$$

۲۸- به ازای چند عدد طبیعی  $d$ ، روابط  $d \mid 12$  و  $d \mid 180$  برقرار است؟

$$2 \quad (1) \quad 4 \quad (2)$$

$$8 \quad (3) \quad 16 \quad (4)$$

۲۹- چند نقطه با مختصات صحیح بر منحنی به معادله  $xy - y + x^2 - 3x = 0$  وجود دارد؟

$$1 \quad (1) \quad 2 \quad (2)$$

$$3 \quad (3) \quad 4 \quad (4)$$

۳۰- اگر  $(a, b) = 2$ ، آنگاه حداکثر مقدار ممکن برای  $(4a, 3b)$  کدام است؟

$$2 \quad (1) \quad 6 \quad (2)$$

$$12 \quad (3) \quad 24 \quad (4)$$



## فیزیک ۳

## فیزیک ۳

حرکت بر خط راست  
صفحه‌های ۱ تا ۲۱

۳۱- در حرکت بر روی خط راست، کدامیک از عبارتهای زیر الزاماً در مورد بردارهای جابه‌جایی در

بازه‌های زمانی مختلف، درست است؟

(۱) هم‌اندازه هستند.

(۲) برابری آن‌ها برابر با صفر است.

(۳) اندازه تغییرات آن‌ها نسبت به زمان ثابت است.

(۴) هم‌راستا هستند ولی می‌توانند هم‌سو نباشند.

۳۲- جسمی که با سرعت ثابت روی محور  $x$  حرکت می‌کند، در لحظه  $t_1 = 5s$  در مکان  $x_1 = 16m$  و در لحظه  $t_2 = 7s$  در

مکان  $x_2 = 24m$  است. معادله حرکت این جسم در SI کدام است؟

$$x = 4t - 4 \quad (2)$$

$$x = 4t + 8 \quad (1)$$

$$x = 8t - 4 \quad (4)$$

$$x = 4t - 8 \quad (3)$$

۳۳- نمودار مکان- زمان حرکت متحرکی روی خط راست، به صورت سهمی شکل زیر است. اندازه سرعت لحظه‌ای متحرک در زمان‌های

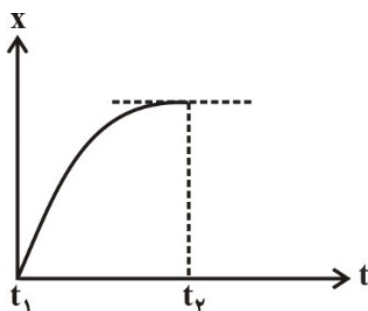
مختلف بین  $t_1$  و  $t_2$  در مقایسه با اندازه سرعت متوسط این متحرک بین دو لحظه  $t_1$  و  $t_2$  ...

(۱) همواره کم‌تر است.

(۲) همواره بیش‌تر است.

(۳) ابتدا کم‌تر و سپس بیش‌تر است.

(۴) ابتدا بیش‌تر و سپس کم‌تر است.







۳۴- سرعت ذره‌ای که با شتاب ثابت در مسیری مستقیم حرکت می‌کند، در مکان‌های  $x_1 = 1\text{m}$  و  $x_2 = 15\text{m}$ ، به ترتیب برابر با  $5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  و

$9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  است. اگر مکان اولیه ذره برابر با  $x_0 = -1/25\text{m}$  باشد، اندازه سرعت اولیه آن بر حسب متر بر ثانیه و شتاب حرکت آن بر حسب

متر بر مجذور ثانیه، به ترتیب از راست به چپ، کدام است؟

۴, ۲ (۱)      ۲, ۴ (۲)

۳, ۱ (۳)      ۱, ۳ (۴)

۳۵- اتومبیلی از حال سکون و با شتاب ثابت  $a$  در مسیری مستقیم شروع به حرکت می‌کند. بعد از مدتی ادامه مسیر را با شتاب ثابتی به

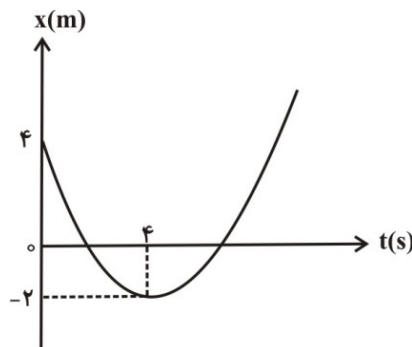
اندازه  $5a$  طی می‌کند تا متوقف شود. مسافت طی شده در مرحله اول، چند برابر مسافت طی شده در مرحله دوم حرکت است؟

۵ (۱)       $\frac{1}{5}$  (۲)

$\frac{5}{2}$  (۳)       $\frac{2}{5}$  (۴)

۳۶- نمودار مکان - زمان حرکت متحرکی که روی محور  $x$  حرکت می‌کند، یک سهمی مطابق با شکل زیر است. این متحرک برای اولین بار

با چه سرعتی بر حسب متر بر ثانیه از مبدأ مکان عبور می‌کند؟



$\sqrt{2}$  (۱)

$-\sqrt{2}$  (۲)

$\sqrt{3}$  (۳)

$-\sqrt{3}$  (۴)



۳۷- معادله سرعت ذره‌ای که بر روی خط راست حرکت می‌کند، در SI به صورت  $v = 10 + 2t$  است. سرعت متوسط این ذره در ثانیه دوم

حرکت، چند متر بر ثانیه است؟

۱۲ (۱)

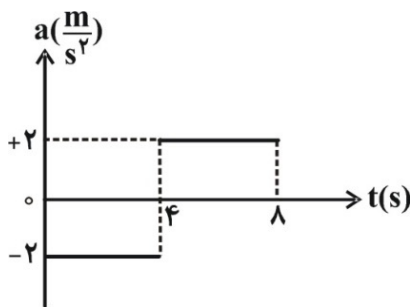
۱۳ (۲)

۱۴ (۳)

۱۵ (۴)

۳۸- نمودار شتاب-زمان متحرکی در حرکت بر خط راست مطابق شکل زیر است. اگر سرعت اولیه جسم  $4 \frac{m}{s}$  باشد، در کدام بازه زمانی بر حسب

ثانیه، حرکت متحرک تندشونده است؟



۶ < t < ۸, t < ۲ (۱)

۲ < t < ۶ (۲)

۶ < t < ۸, ۲ < t < ۴ (۳)

t < ۴ (۴)

۳۹- جسمی روی خط راست از حالت سکون با شتاب ثابت شروع به حرکت می‌کند و ۵ ثانیه به حرکت خود ادامه می‌دهد. اگر این جسم در

بازه زمانی ۳s تا ۵s به اندازه ۳۲ متر جابه‌جا شود، در بازه زمانی صفر تا ۵s چند متر جابه‌جا شده است؟

۴۰ (۱)

۵۰ (۲)

۸۰ (۳)

۱۰۰ (۴)

۴۰- زمان واکنش یک راننده برای ترمز کردن برابر با ۰/۵s و بیشینه اندازه شتاب ترمزگیری خودروی او برابر با  $5 \frac{m}{s^2}$  است. حداقل

فاصله این خودرو که با سرعت ثابت  $25 \frac{m}{s}$  در مسیری مستقیم حرکت می‌کند، تا یک مانع چند متر باشد تا به آن برخورد نکند؟

۶۲/۵ (۱)

۷۵ (۲)

۱۰۰ (۳)

۵۰ (۴)



حسابان ۲

۱- گزینه «۴»

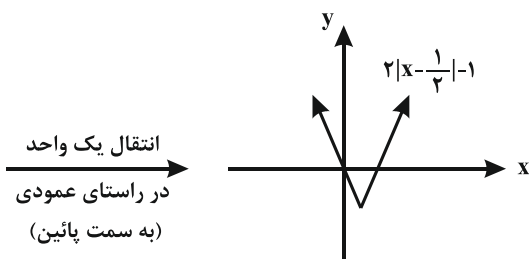
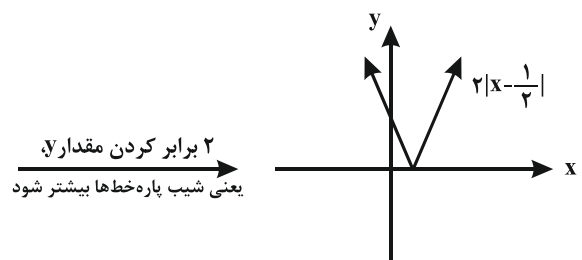
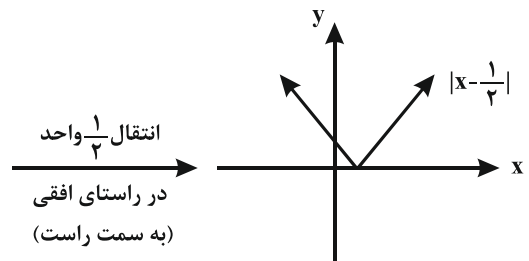
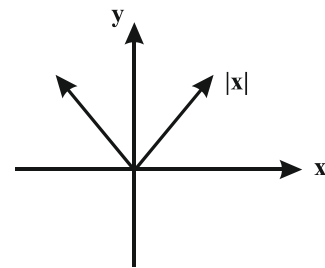
(سعید جعفری کافعی آبار)

برای رسم نمودار  $-f$  کافی است نمودار  $f$  را نسبت به محور  $x$  ها قرینه کنیم. بنابراین پاسخ صحیح، گزینه «۴» خواهد بود.

۲- گزینه «۳»

(سید عارل مسینی)

$$y = \sqrt{(2x-1)^2} - 1 = 2\sqrt{\left|x - \frac{1}{2}\right|} - 1$$



۳- گزینه «۲»

(یاسین سپهر)

برای رسم نمودار تابع  $g$ ، کافی است نمودار تابع  $f$  را ۲ واحد به سمت چپ و ۳ واحد به سمت بالا انتقال دهیم. یعنی  $g(x) = f(x+2) + 3$ . توجه: با استفاده از عددگذاری هم می‌توان گزینه صحیح را پیدا کرد. کافی است متناظر نقطه  $(0,0)$  از تابع  $f$  را به دست آوریم.

$$(x_0, y_0) = (0, 0) \Rightarrow (x_0 - 2, y_0 + 3) = (-2, 3)$$

که فقط در گزینه «۲» این نقطه وجود دارد.

۴- گزینه «۴»

(مرضیه کورری)

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

یک واحد انتقال به سمت راست در راستای محور  $x$  ها  $\rightarrow f(x-1) = \frac{1}{x-1}$

انعکاس نسبت به محور  $y$  ها  $\rightarrow f(-x-1) = \frac{1}{-x-1}$

انعکاس نسبت به محور  $x$  ها  $\rightarrow -f(-x-1) = \frac{-1}{-x-1} = \frac{1}{1+x}$

۵- گزینه «۱»

(سعید جعفری کافعی آبار)

$$y = \frac{f+1-1}{f+1} = 1 - \frac{1}{f+1}$$

اگر  $f$  مقداری ثابت باشد،  $y$  نیز ثابت است.

اگر  $f$  افزایش یابد،  $f+1$  نیز افزایش،  $\frac{1}{f+1}$  کاهش،  $-\frac{1}{f+1}$  افزایش و در نتیجه  $y = 1 - \frac{1}{f+1}$  افزایش می‌یابد.

اگر  $f$  کاهش یابد،  $f+1$  نیز کاهش،  $\frac{1}{f+1}$  افزایش،  $-\frac{1}{f+1}$  کاهش و در نتیجه  $y = 1 - \frac{1}{f+1}$  کاهش می‌یابد.

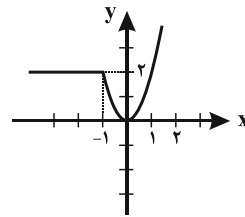
بنابراین روند افزایش یا کاهش دو تابع  $f$  و  $y = \frac{f}{f+1}$  یکسان است. تنها

گزینه‌ای که با نکات بالا هم‌خوانی دارد، گزینه «۱» است.



۶- گزینه «۴»

(سیر عارل مسینی)



نمودار تابع را رسم می کنیم:

واضح است که تابع، فقط در بازه  $[-1, 0]$

اکیداً نزولی است؛ بنابراین طول این بازه ۱

خواهد بود.

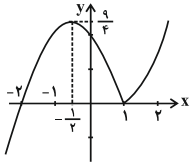
توجه کنید که رأس سهمی در نقطه  $(-\frac{1}{4}, -\frac{9}{4})$

قرار دارد. حال اگر بخواهیم نمودار تابع  $f(x)$  را

رسم کنیم، برای  $x \geq 1$  باید  $g(x)$  را رسم کرده و

برای  $x < 1$  تابع  $-g(x)$  را رسم کنیم، بنابراین

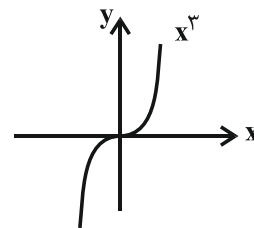
تابع  $f$  به صورت روبه‌رو خواهد شد:



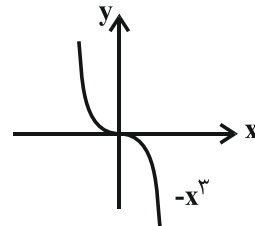
با توجه به شکل، نمودار تابع در بازه  $[-\frac{1}{4}, 1]$  نزولی است.

۷- گزینه «۴»

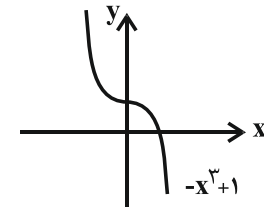
(سعید جعفری کافی آبار)



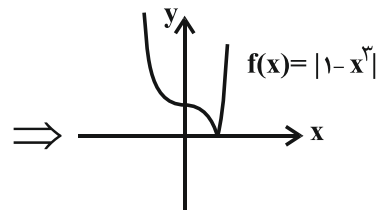
قرینه نسبت به محور X ها



انتقال یک واحد به سمت بالا



قرینه کردن مقادیر منفی تابع نسبت به محور X ها

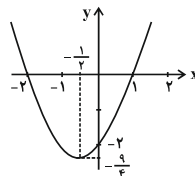


۸- گزینه «۴»

(محمدمصطفی ابراهیمی)

$$f(x) = (x+2)|x-1| = \begin{cases} (x+2)(x-1) & ; x \geq 1 \\ -(x+2)(x-1) & ; x < 1 \end{cases}$$

نمودار تابع  $g(x) = (x+2)(x-1)$  به صورت

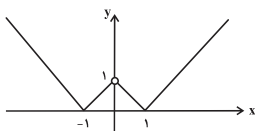


شکل روبه‌رو است:

(شروین سیاح‌نیا)

۹- گزینه «۳»

$$y = \left| \frac{x}{|x|} - x \right| = \begin{cases} \left| \frac{x}{x} - x \right| = |1 - x| = |x - 1| & ; x > 0 \\ \left| \frac{x}{-x} - x \right| = |-1 - x| = |1 + x| & ; x < 0 \end{cases}$$



نمودار تابع را رسم می کنیم.

مطابق شکل این تابع در فاصله  $(0, 1)$  اکیداً نزولی است.

(امیر هوشنگ فمسه)

۱۰- گزینه «۳»

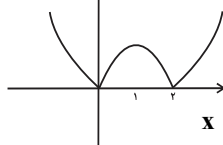
مطابق شکل این تابع در  $[2, +\infty)$  صعودی است (البته در  $(0, 1)$  هم صعودی است

ولی بزرگ‌ترین بازه نیست).

$$x > 2: y = f(x) = x^2 - 2x \Rightarrow y = x^2 - 2x + 1 - 1 \Rightarrow y = (x-1)^2 - 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{y+1} = x-1 \Rightarrow f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x+1}$$

$$\Rightarrow \sqrt{y+1} = x-1 \xrightarrow{x \geq 2} \sqrt{y+1} \geq 1 \Rightarrow y \geq 0$$



از طرفی:



هندسه ۳

۱۳- گزینه «۲»

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A \times A^2 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^3 = I$$

$$A^{20} = A^{18} \times A^2 = (A^3)^6 \times A^2 = I^6 \times A^2 = I \times A^2$$

$$\Rightarrow A^{20} = A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

تذکر: توان‌های یک ماتریس مربعی خاصیت جابه‌جایی دارند.

مثال:

$$A^3 \times A^5 = A^5 \times A^3 = A^2 \times A^6 = A^6 \times A^2$$

۱۴- گزینه «۲»

از اتحادهای مثلثاتی می‌دانیم  $\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta$ ، پس خواهیم داشت:

$$A = \begin{bmatrix} \tan x & -1 \\ \frac{1}{\cos^2 x} & -\tan x \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} \tan x & -1 \\ \frac{1}{\cos^2 x} & -\tan x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tan x & -1 \\ \frac{1}{\cos^2 x} & -\tan x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$$

$$\Rightarrow A^{20} + A^{20} + A^6 = (-I)^{10} + (-I)^5 + (-I)^3$$

$$= -I + I - I = -I$$

۱۱- گزینه «۴»

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (A + B)^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$C = A - (A + B)^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

۱۲- گزینه «۳»

نخست دو ماتریس را با نوشتن درایه‌هایشان مشخص و سپس  $A - B$  را پیدا

می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A - B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (A - B)^2 \times (A - B) = (A - B) \times (A - B) \times (A - B)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



۱۵- گزینه «۱»

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$AB = BA = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2a - c & 2b - d \\ a + 2c & b + 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a + b & -a + 2b \\ 2c + d & -c + 2d \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 2a - c = 2a + b \Rightarrow -c = b \Rightarrow b + c = 0$$

۱۶- گزینه «۳»

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2 = 3A \Rightarrow A^4 = 9A^2 = 9(3A) = 27A$$

$$A^5 = 27A^2 = 27(3A) = 81A = \begin{bmatrix} 81 & 81 \\ 162 & 162 \end{bmatrix}$$

$$A^5 = \text{مجموع درایه‌های ستون اول} = 81 + 162 = 243$$

۱۷- گزینه «۴»

$$|A| = 0 \Rightarrow 2a + 4 - 3a = 0 \Rightarrow a = 4$$

$$\Rightarrow B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -8 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{-15 + 16} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow -3 - 2 + 8 + 5 = 8$$

۱۸- گزینه «۳»

$$A^3 = \bar{O} \Rightarrow A^3 + I = I \Rightarrow (A+I)(A^2 - A + I) = I$$

و می‌دانیم اگر حاصل ضرب دو ماتریس برابر ماتریس واحد شود، آن دو

ماتریس وارون هم هستند. لذا داریم:

$$(A+I)^{-1} = A^2 - A + I$$

۱۹- گزینه «۴»

$d_{21}$ : درایه مربوط به سطر دوم و ستون اول ماتریس D

ستون اول C × ماتریس B × سطر دوم A =

$$\Rightarrow d_{21} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = -4$$

۲۰- گزینه «۴»

$$B = I_n - A \Rightarrow A + B = I_n$$

$$A^2 + AB + B = A(A+B) + B = AI_n + B = A + B = I_n$$



ریاضیات گسسته

۲۴- گزینه «۳»

$$\left. \begin{aligned} a &= 149q + r \\ r &= 7q^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = 149q + 7q^2 \xrightarrow{0 \leq r < b} 0 \leq 7q^2 < 149$$

$$\Rightarrow q^2 \leq 21 \Rightarrow |q| \leq 4 \Rightarrow q_{\max} = 4$$

$$\Rightarrow a_{\max} = (149 \times 4) + 7 \times 4^2 = 596 + 112 = 708$$

$$\text{مجموع ارقام} = 7 + 8 = 15$$

۲۵- گزینه «۴»

$$\begin{cases} a = 2k + 1 \\ a = 7k' + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 2 = 2(k + 1) & ; k \in \mathbb{Z} \\ a + 2 = 7(k' + 1) & ; k' \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$a + 2$  هم بر ۳ و هم بر ۷ بخشپذیر است، یعنی بر ۲۱ بخش پذیر است.

در نتیجه:

$$a + 2 = 21q = 21(q - 1 + 1) = 21(q - 1) + 21 \Rightarrow a = 21q' + 19$$

۲۶- گزینه «۲»

اگر  $a$  و  $b$  دو عدد به فرم  $4k - 3$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) باشند، داریم:

$$\begin{cases} a = 4k - 3 \\ b = 4k' - 3 \end{cases} \Rightarrow ab = (4k - 3)(4k' - 3)$$

$$= 16kk' - 12k - 12k' + 9 = 4(4kk' - 3k - 3k' + 3) - 3$$

$$= 4q - 3 \quad (q \in \mathbb{Z})$$

یعنی دو عضو دلخواه از مجموعه  $B$  را اگر در هم ضرب کنیم حاصل، باز هم به

۲۱- گزینه «۱»

اگر  $p^3 = 2q^3$  باشد، آنگاه  $\sqrt[3]{2} = \frac{p}{q}$ ؛ اما با توجه به این که  $p, q \in \mathbb{N}$ ، این

تساوی امکان ندارد چون  $\sqrt[3]{2}$  گویا نیست. پس هیچ مقدار طبیعی برای  $q, p$

نداریم.

البته دقت کنید که  $p = q = 0$  در این معادله صدق می کند، اما این جوابها

جزء اعداد طبیعی نیستند.

۲۲- گزینه «۴»

نکته: اگر  $S = \{a - bq \geq 0 : a, b, q \in \mathbb{Z}\}$ ، آنگاه کوچک ترین عضو  $S$ ،

باقی مانده تقسیم  $a$  بر  $b$  است.

عضو ابتدای مجموعه  $A = \{5328 - 12q \geq 0; q \in \mathbb{Z}\}$ ، بر اساس نکته بالا، برابر

باقی مانده تقسیم ۵۳۲۸ بر ۱۲ است.

این باقی مانده برابر صفر است. یعنی عضو ابتدای مجموعه  $A$  برابر صفر می باشد.

۲۳- گزینه «۱»

$$\left. \begin{aligned} b \mid a \\ a \mid b + c \end{aligned} \right\} \Rightarrow b \mid b + c \Rightarrow b \mid (b + c) - b \Rightarrow b \mid c$$

از طرفی  $b \mid b$



فرم  $۳ - ۴k$  خواهد بود.

۲۸- گزینه «۲»

$$۱۲ | d \Rightarrow d = ۱۲q$$

$$d | ۱۸۰ \Rightarrow ۱۲q | ۱۸۰ \Rightarrow q | ۱۵ \Rightarrow q = ۱, ۳, ۵, ۱۵$$

بنابراین چهار عدد  $۱۲, ۳۶, ۶۰, ۱۸۰$  در رابطه‌های داده شده صدق می‌کنند.

۲۹- گزینه «۴»

$$xy - y + x^2 - 3x = 0 \Rightarrow y(x-1) = 3x - x^2 \Rightarrow y = \frac{x^2 - 3x}{1-x}$$

برای آن که  $y$  عددی صحیح باشد، باید صورت کسر بر مخرج کسر

تقسیم‌پذیر باشد.

$$\begin{cases} 1-x | x^2 - 3x \\ 1-x | 1-x \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} 1-x | -2x$$

$$\begin{cases} 1-x | -2x \\ 1-x | 1-x \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} 1-x | -2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1-x = \pm 1 \\ 1-x = \pm 2 \end{cases} \Rightarrow x = 0, 2, -1, 3$$

نقاط زیر روی منحنی مذکور وجود دارند:

$$(0, 0), (2, 2), (-1, 2), (3, 0)$$

۳۰- گزینه «۴»

فرض کنیم  $a' = \frac{a}{۳}$  و  $b' = \frac{b}{۴}$  باشد، در این صورت  $(fa, 3b) = (8a', 4b')$

حال کافی است  $a' = 3k$  و  $b' = 4k'$  به گونه‌ای که  $(k, k') = 1$  در نظر گرفته

شوند تا حداکثر مقدار ممکن برای  $(fa, 3b)$  به دست آید. داریم:

$$(fa, 3b) = (24k, 24k') = 24(k, k') = 24 \times 1 = 24$$

مثال نقض برای سایر گزینه‌ها:  $(k \in \mathbb{Z})$

$$\text{گزینه «۱»}: \begin{cases} 3 \in A \\ 7 \in A \end{cases} \Rightarrow 3 \times 7 = 21 \neq 4k + 3 \Rightarrow 21 \notin A$$

$$\text{گزینه «۳»}: \begin{cases} -3 \in C \\ 2 \in C \end{cases} \Rightarrow (-3)(2) = -6 \neq 5k - 3 \Rightarrow -6 \notin C$$

$$\text{گزینه «۴»}: \begin{cases} 5 \in D \\ 11 \in D \end{cases} \Rightarrow 5 \times 11 = 55 \neq 6k + 5 \Rightarrow 55 \notin D$$

۲۷- گزینه «۴»

گزینه «۱»:

$$\left. \begin{aligned} & \begin{cases} a-b | a+b \xrightarrow{(+)} a-b | 2a \Rightarrow a-b | 4a \\ a-b | a-b \end{cases} \\ & \begin{cases} a-b | a+b \xrightarrow{(-)} a-b | 2b \\ a-b | a-b \end{cases} \end{aligned} \right\} \Rightarrow a-b | 4a - 2b$$

$$\text{گزینه «۲»}: \begin{cases} a-b | 2a \xrightarrow{(+)} a-b | 3a - b \\ a-b | a-b \end{cases}$$

$$\text{گزینه «۳»}: \begin{cases} a-b | 2b \xrightarrow{(-)} a-b | 3b - a \\ a-b | a-b \end{cases}$$

مثال نقض برای گزینه «۴»: اگر  $a = 5$  و  $b = 3$  در نظر گرفته شوند، آنگاه:

$$\begin{cases} a-b = 2 \\ a+b = 8 \end{cases} \Rightarrow a-b | a+b$$

$$4a + b = 23 \Rightarrow a-b \nmid 4a + b$$



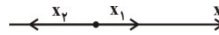


فیزیک ۳

گزینه ۳۱ «۴»

(بابک اسلامی)

در حرکت بر روی خط راست، چون روی یک خط حرکت انجام می‌شود، بنابراین بردارهای جابه‌جایی الزاماً هم‌راستا هستند ولی می‌توانند هم‌سو نباشند.



گزینه ۳۲ «۲»

(آزاد پزشکی - ۷۹)

با استفاده از معادله حرکت با سرعت ثابت برای دو لحظه  $t_1 = 5s$  و  $t_2 = 7s$  می‌توان نوشت:

$$x = vt + x_0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 5s \Rightarrow 16 = v \times 5 + x_0 \\ t_2 = 7s \Rightarrow 24 = v \times 7 + x_0 \end{cases}$$

حل دستگاه  $\rightarrow v = 4 \frac{m}{s}, x_0 = -4m \Rightarrow x = 4t - 4$

گزینه ۳۳ «۴»

(فرشید رسولی)

با توجه به این که سرعت لحظه‌ای شیب خط مماس بر نمودار مکان-زمان متحرک است، می‌توان نتیجه گرفت که متحرک در لحظه  $t_1$  دارای سرعتی برابر  $v_0$  بوده و در لحظه  $t_2$  سرعت آن به صفر رسیده است.

هم‌چنین سرعت متوسط متحرک بین لحظه‌های  $t_1$  و  $t_2$  برابر است با:

$$v_{av} = \frac{v_{t_1} + v_{t_2}}{2} = \frac{v_0 + 0}{2} = \frac{v_0}{2}$$

بنابراین سرعت لحظه‌ای متحرک بین زمان‌های  $t_1$  و  $t_2$ ، ابتدا بیش‌تر از سرعت متوسط و سپس کم‌تر از سرعت متوسط آن می‌باشد.

گزینه ۳۴ «۲»

(هوشنگ کرمی)

با دو بار استفاده از معادله سرعت - جابه‌جایی در حرکت با شتاب ثابت در مسیری مستقیم، داریم:

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a(x_2 - x_1) \Rightarrow 9^2 - 5^2 = 2a(15 - 1)$$

$$\Rightarrow 81 - 25 = 28a \Rightarrow a = 2 \frac{m}{s^2}$$

$$v_1^2 - v_0^2 = 2a(x_1 - x_0) \Rightarrow 5^2 - v_0^2 = 2 \times 2 \times (1 - (-1/25))$$

$$\Rightarrow 25 - v_0^2 = 9 \Rightarrow v_0^2 = 16 \Rightarrow |v_0| = 4 \frac{m}{s}$$

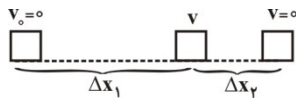
گزینه ۳۵ «۱»

(ناصر شوارزمی)

با استفاده از معادله سرعت - جابه‌جایی در حرکت با شتاب ثابت در مسیری مستقیم، داریم:

$$\text{مرحله اول: } v^2 - 0 = 2a\Delta x_1 \Rightarrow \Delta x_1 = \frac{v^2}{2a}$$

$$\text{مرحله دوم: } 0 - v^2 = 2(-a)\Delta x_2 \Rightarrow \Delta x_2 = \frac{v^2}{2a}$$



$$\Rightarrow \frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} = \frac{\frac{v^2}{2a}}{\frac{v^2}{2a}} \Rightarrow \frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} = 1$$

گزینه ۳۶ «۴»

(فسرو ارغوانی فرد)

رابطه مستقل از شتاب را از لحظه  $t = 0$  تا لحظه  $t = 4s$  که سرعت متحرک برابر با صفر می‌شود، می‌نویسیم:

$$\Delta x = \frac{v + v_0}{2} \Delta t \Rightarrow (-2 - 4) = \frac{0 + v_0}{2} \times (4 - 0)$$

$$\Rightarrow v_0 = -3 \frac{m}{s}$$

بنابراین شتاب حرکت برابر است با:

$$a = \frac{v - v_0}{\Delta t} = \frac{0 - (-3)}{4} = \frac{3}{4} \frac{m}{s^2}$$

حال رابطه سرعت - جابه‌جایی را از شروع حرکت تا رسیدن به مبدأ مکان برای اولین بار می‌نویسیم:

$$v'^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow v'^2 - 9 = 2 \left(\frac{3}{4}\right) (0 - 4) \Rightarrow v' = \pm \sqrt{3} \frac{m}{s}$$

وقتی اولین بار متحرک به مبدأ مکان می‌رسد، شیب نمودار  $x - t$  منفی و در نتیجه سرعت منفی می‌باشد.

$$v' = -\sqrt{3} \frac{m}{s}$$



گزینه ۳۷ «۲»

(علیرضا یقین)

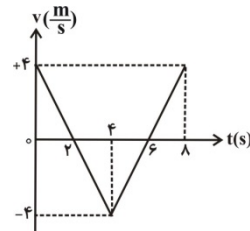
چون معادله سرعت- زمان حرکت ذره بر روی خط راست از درجه اول است، بنابراین شتاب حرکت آن ثابت است و می توان نوشت:

$$\begin{cases} t_1 = 1s \Rightarrow v_1 = 12 \frac{m}{s} \\ t_2 = 2s \Rightarrow v_2 = 14 \frac{m}{s} \end{cases} \Rightarrow v_{av} = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{12 + 14}{2} \Rightarrow v_{av} = 13 \frac{m}{s}$$

گزینه ۳۸ «۳»

(سمیرضا امیرلطفی)

از روی نمودار شتاب- زمان می بینیم که شتاب حرکت متحرک در بازه های زمانی صفر تا ۴ ثانیه و ۴ تا ۸ ثانیه ثابت است. برای رسم نمودار سرعت- زمان داریم:



$$0 < t < 4s \Rightarrow v = -2t + 4 \xrightarrow{t=4s} v_4 = -4 \frac{m}{s}$$

$$v = 0 \Rightarrow -2t + 4 = 0 \Rightarrow t = 2s$$

$$4s < t < 8s \Rightarrow v = 2(t - 4) - 4 \xrightarrow{t=8s} v_8 = 4 \frac{m}{s}$$

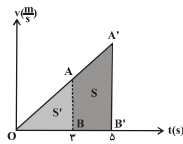
$$v = 0 \Rightarrow 2(t - 4) - 4 = 0 \Rightarrow t = 6s$$

در بازه زمانی ای که سرعت و شتاب هم جهت باشند ( $a_x v_x > 0$ )، حرکت متحرک تندشونده و در بازه زمانی ای که در خلاف جهت هم باشند ( $a_x v_x < 0$ )، حرکت متحرک کندشونده است. بنابراین در بازه های زمانی ۲s تا ۴s و ۴s تا ۶s حرکت متحرک کندشونده است.

گزینه ۳۹ «۲»

(نمراله افاضل)

با توجه به این که شتاب حرکت جسم ثابت است، نمودار سرعت- زمان آن مطابق شکل زیر، به صورت یک خط راست است و مساحت محصور بین نمودار با محور زمان برابر ۳۲m است. از تشابه دو مثلث OAB و OA'B' می توان نوشت:



$$\Delta OA'B' \sim \Delta OAB \Rightarrow \frac{S' + S}{S'} = \left(\frac{5}{3}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{S' + 32}{S'} = \frac{25}{9} \Rightarrow S' = 18m$$

دقت کنید نسبت های مساحتی با توان دوم نسبت های طولی متناسب اند.

در نهایت جابه جایی متحرک بین لحظه های  $t = 0$  و  $t = 5s$  برابر است با:

$$\Delta x_{کل} = S + S' \Rightarrow \Delta x_{کل} = 32 + 18 = 50m$$

گزینه ۴۰ «۲»

(رضا صفایی)

در ۵/ - ثانیه اول که زمان واکنش راننده است، می توان فرض کرد که اتومبیل

با سرعت ثابت حرکت می کند و مسافت  $\Delta x_1 = vt = 25 \times 0.5 = 12.5m$

را طی می کند، اما پس از ترمز کردن راننده، اتومبیل حرکت کندشونده با شتاب

$$a = -\frac{5}{4} \frac{m}{s^2}$$

دارد و از معادله سرعت - جابه جایی می توان نوشت:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x_2$$

$$\Rightarrow 0 - 25^2 = 2 \times (-5) \times \Delta x_2 \Rightarrow \Delta x_2 = 62.5m$$

بنابراین در لحظه دیدن مانع توسط راننده، حداقل فاصله خودرو از مانع باید

برابر  $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 75m$  باشد تا به آن برخورد نکند.