بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی (وقف عام)

آزمون غیرحضوری
دوازدهم ریاضی
(۱۶ آذر ۱۳۹۷)
(مباحث ۳۰ آذر ۹۷)

گزینشگران و ویراستاران

نام درس	حسابان ۲	هندسه ۳	ریاضیات گسسته	فیزیک ۳	شیمی ۳
گزینشگر	سیدعادل حسینی	امیرحسین ابومحبوب	امیرحسین ابومحبوب	بابک اسلامی	سهند راحمی‌پور
گروه ویراستاری	مرضیه گودرزی علی ارجمند	علیرضا صابری	علیرضا صابری	حمید زرین‌کفش	سهند راحمی‌پور
مسئول درس	سیدعادل حسینی	امیرحسین ابومحبوب	امیرحسین ابومحبوب	بابک اسلامی	سهند راحمی‌پور

گروه فنی و تولید:

مسئول تولید آزمون غیرحضوری	محمد اکبری
مسئول دفترچه آزمون غیرحضوری	نرگس غنی‌زاده
گروه مستندسازی	**مدیر گروه:** مریم صالحی **مسئول دفترچه:** آتنه اسفندیاری
حروف‌نگار و صفحه‌آرا	حسن خرّم‌جو
ناظر چاپ	سوران نعیمی

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی «وقف عام»

دفتر مرکزی: خیابان انقلاب بین صبا و فلسطین – پلاک ۹۲۳ – تلفن: ۶۶۹۶۲۴۰۰

«تمام دارایی‌ها و درآمدهای بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی وقف عام است بر گسترش دانش و آموزش»

حسابان ۲

مثلثات، حدهای نامتناهی
حد در بینهایت
صفحه‌های ۲۳ تا ۶۹

حسابان ۲

۱- دورهٔ تناوب تابع $y=\begin{cases} ۴ & ; \quad x\in\mathbb{Q} \\ \sin(\pi x)\cos(\pi x) & ; \quad x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) π ۴) متناوب نیست.

۲- جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos\frac{۵\pi}{۳}+\sin(\frac{۲\pi}{۳}+x)-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\cos x=۰$ کدام است؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) $۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$ ۲) $۲k\pi-\frac{\pi}{۲}$

۳) $۲k\pi+\frac{۵\pi}{۶}$ ۴) $k\pi$

۳- جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\frac{۱-\cos ۲x}{\sin ۲x}=\sqrt{۳}$ به کدام صورت است؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) $۲k\pi+\frac{۵\pi}{۶}$ ۲) $۲k\pi+\frac{\pi}{۳}$

۳) $k\pi+\frac{۵\pi}{۶}$ ۴) $k\pi+\frac{\pi}{۳}$

۴- معادلهٔ $\sin(\frac{\pi}{۴}+x)\sin(\frac{\pi}{۴}-x)=\frac{۱}{۳}$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ چند ریشه دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵- معادلهٔ $x^۲-\cos x=۲x$، چند ریشهٔ مثبت دارد؟

۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۶- نمودار تابع $f(x)=\tan(\pi\sin x)$ در اطراف مجانب قائم بازهٔ $(۰,\frac{\pi}{۲})$ چگونه است؟

۱)

۲)

۳)

۴)

۷- نمودار منحنی به معادلهٔ $y=\frac{\sin x+1}{\cos x-1}$، در اطراف مجانب‌های قائم خود چگونه است؟

۱)

۲)

۳)

۴)

۸- حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2(x-1)^2}{\sqrt{4x^2+4x+1}}+x\right)$ کدام است؟

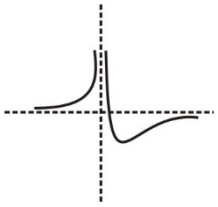
۱) $\frac{5}{2}$

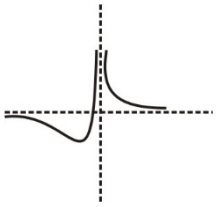
۲) $-\frac{5}{2}$

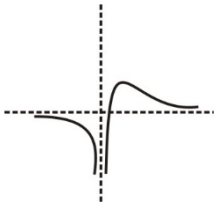
۳) $\frac{3}{2}$

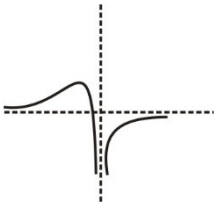
۴) صفر

۹- نمودار $y=\frac{x-2}{x^2+4x+4}$ با توجه به مجانب‌هایش، شبیه کدام شکل زیر است؟

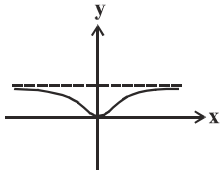
۱) 

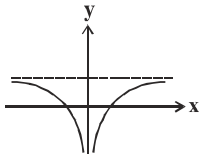
۲) 

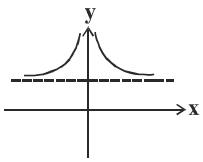
۳) 

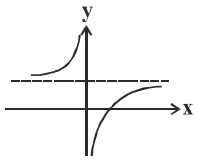
۴) 

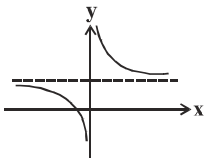
۱۰- اگر نمودار تابع با ضابطهٔ $y=f(x)$ به صورت مقابل باشد، نمودار تابع با ضابطهٔ $y=(\frac{1}{f})(x)$ کدام یک از شکل‌های زیر می‌تواند باشد؟



۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

هندسه ۳

هندسه ۳
ماتریس و کاربردها
آشنایی با مقاطع مخروطی
صفحه‌های ۲۷ تا ۵۰

۱۱- اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$، آنگاه دترمینان ماتریس $\frac{1}{2}A^3$ کدام است؟

۱) -500
۲) -250
۳) -1000
۴) -125

۱۲- اگر A ماتریس مربعی از مرتبهٔ ۲ و $||A|A+2A|=|A|$، آنگاه دترمینان ماتریس $2A$ کدام نمی‌تواند باشد؟

۱) صفر
۲) -4
۳) -8
۴) -12

۱۳- دو خط L_1 و L_2 برهم عمودند. پاره‌خط AB که طول آن مقدار ثابتی است، طوری تغییر می‌کند که همواره A روی L_1 و B روی L_2 قرار دارد. مکان هندسی وسط پاره‌خط AB کدام است؟

۱) دایره
۲) دو خط موازی
۳) دو خط عمود بر هم
۴) یک خط

۱۴- کم‌ترین فاصلهٔ بین نقاط دو دایرهٔ $C:(x-2)^2+(y+1)^2=1$ و $C':(x+1)^2+(y-3)^2=4$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$
۲) 2
۳) $\frac{5}{2}$
۴) $\sqrt{5}$

۱۵- حدود تغییرات m کدام باشد تا نقطهٔ $A=(1,m)$ خارج دایرهٔ $x^2+y^2-m(x+y)+2m=0$ قرار گیرد؟

۱) $m>-1$
۲) $m>4$ یا $-1<m<0$
۳) $m>0$
۴) $-1<m<4$

۱۶- دو دایره به معادله‌های $(x-۲)^۲+(y-m)^۲=۱۶$ و $x^۲+y^۲+۶x=۰$ بر هم مماس هستند. مقدار مثبت m کدام است؟

۱) $\sqrt{۶}$ ۲) $۲\sqrt{۶}$

۳) $۴\sqrt{۶}$ ۴) $۳\sqrt{۶}$

۱۷- نقطهٔ متغیر H را روی خط $d:۳x-۴y+۸=۰$ و نقطهٔ متغیر A را روی دایرهٔ $C:x^۲+y^۲-۲x+۲y+۱=۰$ در نظر می‌گیریم.

کوتاه‌ترین فاصلهٔ AH کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲

۳) ۱ ۴) صفر

۱۸- دایره‌ای به شعاع ۲ که در مبدأ مختصات بر محور yها مماس است، خط $x=۱$ را در دو نقطه قطع کرده است. عرض مثبت نقطهٔ تلاقی کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) ۱

۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۳}$

۱۹- در یک بیضی، فاصلهٔ هر کانون از دورترین رأس برابر ۸ و از هر یک از دو سر قطر کوچک بیضی برابر ۵ است. خروج از مرکز این بیضی چقدر است؟

۱) ۰/۲ ۲) ۰/۴

۳) ۰/۶ ۴) ۰/۸

۲۰- دایرهٔ $x^۲+y^۲-۲x+۶y=۶$، بزرگ‌ترین دایرهٔ محاط درون یک بیضی است. اگر $F=(۳,۱)$ یکی از کانون‌های این بیضی باشد، خروج از مرکز این بیضی کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۵}}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$

۳) $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

ریاضیات گسسته

ریاضیات گسسته
آشنایی با نظریه اعداد
گراف و مدل‌سازی
صفحه‌های ۲۲ تا ۴۲

۲۱- در رابطهٔ همنهشتی به پیمانهٔ ۲۹، عدد $a+43$ به دستهٔ هم‌ارزی [۲۱] تعلق دارد. مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد طبیعی سه رقمی a کدام است؟

۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۱۰

۲۲- به ازای چند عدد طبیعی دو رقمی a، رابطهٔ $a^2 \overset{7}{\equiv} a+2$ برقرار است؟

۱) ۲۰
۲) ۲۵
۳) ۳۰
۴) ۳۵

۲۳- به چند طریق می‌توان یک کیسهٔ ۳۴ کیلویی را با وزنه‌های ۳ و ۵ کیلویی وزن کرد؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

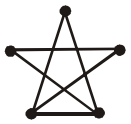
۲۴- مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد طبیعی دو رقمی n به طوری که معادلهٔ $39x+91y=2^n-1$ در مجموعهٔ اعداد صحیح جواب داشته باشد، کدام است؟

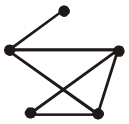
۱) ۵
۲) ۴
۳) ۳
۴) ۲

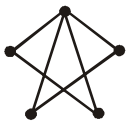
۲۵- اگر به گراف ۴-منتظم مرتبهٔ p، ۱۲ یال اضافه کنیم، گراف کامل K_p به دست می‌آید. p کدام است؟

۱) ۷
۲) ۸
۳) ۹
۴) ۱۰

۲۶- نمودار گراف $G=(V,E)$ که در آن $V=\{a,b,c,d,e\}$ و $E=\{ab,ad,ae,bc,bd,de\}$، کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴)

۲۷- در گراف ساده‌ای که ۱۹ یال دارد، $\delta=4$ است. حداکثر تعداد رئوس این گراف کدام است؟

۱) ۱۵
۲) ۱۰
۳) ۹
۴) ۵

۲۸- در گرافی از اندازهٔ ۱۳، چهار رأس از درجهٔ ۲ و بقیهٔ رئوس از درجهٔ ۳ هستند. میانگین درجات رئوس این گراف کدام است؟

۱) ۲/۴
۲) ۲/۵
۳) ۲/۶
۴) ۲/۷

۲۹- تعداد مسیرهای به طول ۴ در گراف کامل مرتبهٔ ۷ با مجموعهٔ رئوس $V=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ به طوری که ابتدای همهٔ آن‌ها از رأس a باشد، کدام است؟

۱) ۲۴۰
۲) ۱۸۰
۳) ۱۲۰
۴) ۳۶۰

۳۰- در گراف $G=(V,E)$ با مجموعه رئوس $\{v_1,v_2,v_3,...,v_6\}$، در صورتی‌که $E=\{v_1v_2,v_1v_3,v_1v_4,v_2v_3,v_3v_4,v_3v_5\}$ باشد، کدام یال‌ها اضافه یا حذف شوند تا یک گراف ۲–منتظم از مرتبهٔ ۶ به‌دست آید؟

۱) v_1v_6 و v_5v_4 اضافه، v_1v_3 و v_3v_4 حذف

۲) v_6v_3 و v_6v_5 اضافه، v_1v_3 و v_2v_3 حذف

۳) v_1v_6 و v_6v_5 اضافه، v_1v_3 و v_1v_4 حذف

۴) v_6v_5 و v_6v_4 اضافه، v_1v_3 و v_3v_4 حذف

فیزیک

فیزیک
دینامیک و حرکت دایره‌ای
نوسان و موج
صفحه‌های ۳۵ تا ۷۴

۳۱- شخصی به جرم ۵۰ کیلوگرم روی یک ترازوی فنری درکف یک آسانسور ایستاده است. آسانسور قسمتی از مسیر را با شتاب ثابت $۲\frac{m}{s^۲}$ به‌طور تندشونده بالا رفته و سپس با شتاب ثابت $۲\frac{m}{s^۲}$ و به‌طور کندشونده متوقف می‌شود. اندازهٔ اختلاف وزنی که ترازوی فنری در این دو حالت نشان می‌دهد، چند نیوتون است؟ $(g = ۱۰\frac{m}{s^۲})$

۱) ۶۰۰
۲) ۴۰۰
۳) ۲۰۰
۴) صفر

۳۲- چکشی به جرم $۱/۵kg$ را با سرعت $۱۰\frac{m}{s}$ به میخی می‌کوبیم و چکش به حالت سکون قرار می‌گیرد. اگر زمان برخورد چکش با میخ $۰/۰۰۵s$ باشد، بزرگی نیروی متوسطی که به چکش وارد می‌شود، چند نیوتون است؟

۱) ۳۰۰
۲) ۱۵۰۰
۳) ۲۰۰۰
۴) ۳۰۰۰

۳۳- در یک ساعت دیواری، طول عقربه‌های ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار به‌ترتیب برابر با $۸cm$ و $۱۲cm$ است. تندی نوک عقربهٔ ساعت‌شمار، چند برابر تندی نوک عقربهٔ دقیقه‌شمار است؟ $(\pi = ۳)$

۱) $\frac{۱}{۱۸}$
۲) $\frac{۱}{۱۲}$
۳) $\frac{۲}{۳}$
۴) $\frac{۱}{۹}$

۳۴- روی پره‌های یک بالگرد (هلیکوپتر)، نقطه‌ای به فاصلهٔ $۳m$ از محور دوران آن با شتاب مرکزگرای $۲۴۳۰۰\frac{m}{s^۲}$ در حال چرخش است. پره‌های این بالگرد در هر دقیقه چند دور می‌زنند؟ $(\pi = ۳)$

۱) ۱۵
۲) ۹۰۰
۳) ۳۰
۴) ۴۵۰

۳۵- دو ماهواره به جرم‌های $m_۱$ و $m_۲ = ۳m_۱$ در ارتفاع‌های $h_۱ = R_e$ و $h_۲ = ۲R_e$ نسبت به سطح زمین، با سرعت ثابت در مدارهای دایره‌ای شکل به دور زمین می‌چرخند. نسبت تندی ماهوارهٔ دوم به تندی ماهوارهٔ اول، کدام است؟ (R_e شعاع کرهٔ زمین است.)

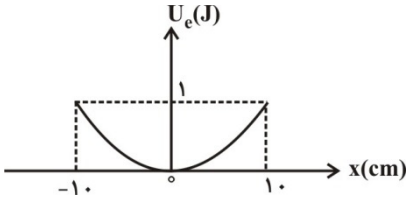
۱) $\sqrt{\frac{۳}{۲}}$
۲) $\sqrt{\frac{۲}{۳}}$
۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۴) $\sqrt{۲}$

۳۶- معادله‌های حرکت هماهنگ سادهٔ دو ذره با جرم‌های مساوی در SI به‌ترتیب بـه‌صـورت $x_1 = 4\cos 20\pi t$ و $x_2 = 2\cos 40\pi t$ اسـت.

نسبت انرژی مکانیکی ذرهٔ (۱) به انرژی مکانیکی ذرهٔ (۲)، کدام است؟

۱) ۲
۲) ۱
۳) $\frac{1}{2}$
۴) $\frac{1}{4}$

۳۷- نمودار انرژی پتانسیل کشسانی نوسانگر هماهنگ ساده‌ای که با دورهٔ $\frac{\pi}{50}s$ در حال نوسان است، مطابق شکل زیر می‌باشد. جرم نوسانگر چند گرم است؟

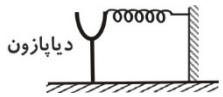


۱) ۰/۰۲
۲) ۲۰
۳) ۰/۰۴
۴) ۴۰

۳۸- یک آونگ ساده به طول L و یک سامانهٔ جرم و فنر که وزن وزنهٔ آن W و ثابت فنر آن k است، هم‌زمان به نوسان در می‌آیند. اگـر دورهٔ تناوب آونگ ساده و سامانهٔ جرم و فنر یکسان باشد، کدام رابطهٔ زیر برقرار است؟

۱) $W = kL$
۲) $W = 2kL$
۳) $W = \sqrt{2}kL$
۴) $W = \frac{1}{2}kL$

۳۹- مطابق شکل زیر، چنان‌چه فنر سبکی را توسط یک دیاپازون به نوسان در آوریم، موج ایجاد شده در فنر از نوع . . . است و با تغییر بسامد دیاپازون، سرعت انتشار این موج در فنر . . .



۱) عرضی- تغییر می‌کند.
۲) طولی- تغییر می‌کند.
۳) عرضی- ثابت می‌ماند.
۴) طولی- ثابت می‌ماند.

۴۰- سیمی به چگالی $7/8\frac{g}{cm^3}$ و قطر مقطع $0/5mm$، بین دو نقطه با نیرویی به بزرگی $234N$ کشیده شده است. اندازهٔ سرعت انتشـار امواج عرضی در این سیم چند $\frac{m}{s}$ است؟ $(\pi = 3)$

۱) 25×10^{-6}
۲) ۴۰
۳) ۱۰۰
۴) ۴۰۰

شیمی

آسایش و رفاه در سایهٔ شیمی
صفحه‌های ۳۷ تا ۶۴

شیمی

۴۱- کدام گزینه جای خالی زیر را به درستی تکمیل نمی‌کند؟

«در رایج‌ترین نوع سلول سوختی ... »

۱) سوخت، که طی واکنش برقکافت آب در یک سلول الکترولیتی تهیه شده است، قبل از عبور از غشا الکترون از دست می‌دهد.

۲) مادهٔ اکسنده، پس از شرکت در واکنشی در سطح کاتالیزگر کاتدی، بخار آب تولید می‌کند.

۳) که نوعی سلول گالوانی است، واکنشی رخ می‌دهد که طی آن، عدد اکسایش اتم‌های سوخت ۱ واحد افزایش می‌یابد و بازده واکنش ۲۰ درصد است.

۴) تمام مواد خروجی و ورودی به حالت گاز هستند.

۴۲- تغییر عدد اکسایش گونهٔ کاهنده در کدام واکنش انجام پذیر بیشتر است؟

۱) $Al + Fe_2O_3 \rightarrow Al_2O_3 + Fe$

۲) $MgSO_4 + Au \rightarrow Au_2(SO_4)_3 + Mg$

۳) فرایند هال

۴) فرآیند هابر

۴۳- کدام گزینه در ارتباط با روشی که طی آن آهن، توسط یک فلز کاهنده‌تر، از اکسایش محافظت می‌شود، کدام نادرست است؟

۱) برای این نوع حفاظت، می‌توان از آلومینیوم، منیزیم یا منگنز استفاده کرد.

۲) به مادهٔ تولید شده با این روش حفاظتی، آهن گالوانیزه یا آهن سفید می‌گویند.

۳) برخلاف حلبی، در اثر ایجاد خراش در سطح این نوع آهن باز هم آهن از اکسایش حفظ می‌شود.

۴) علت عدم استفاده از این نوع آهن، در بسته‌بندی مواد غذایی، احتمال ورود یون‌های فلز کاهنده به درون مواد غذایی است.

۴۴- آبکاری در یک سلول ..... صورت می‌گیرد و طی آن ..... .

۱) الکترولیتی ـ جهت حرکت الکترون از آند به کاتد است یعنی از فلز ارزشمندتر به دیگری است.

۲) سوختی ـ روی سطح فلز کاتد، یون‌های محلول الکترولیت که مربوط به همان فلز اند هستند، کاهش می‌یابند.

۳) الکترولیتی ـ اگر مربوط به قاشق فولادی با فلز نقره باشد، قاشق فولادی را به قطب مثبت باتری وصل می‌کنند.

۴) گالوانی ـ سطح یک فلز را بالایه‌ی نازکی از فلزی ارزشمند و مقاوم در برابر خوردگی می‌پوشانند.

۴۵- چند مورد از موارد زیر از تفاوت‌های سلول‌های گالوانی و الکترولیتی هستند؟

تعریف آند و کاتد به عنوان قطب مثبت و منفی

جهت حرکت الکترون بین آند و کاتد

نوع واکنش انجام شده در سطح آند و کاتد

وجود یا عدم وجود یک دیوارهای متخلخل در سلول

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

۴۶- در ارتباط با برقکافت $NaCl$، چند مورد درست است؟

الف) مادهٔ اولیه الزاماً باید به حالت مذاب باشد و برای کاهش ۲۱۴ درجه سلیسیوسی نقطه ذوب آن، به آن $CaCl_2$ می‌افزایند.

ب) می‌تواند در سلول دانز انجام شود که در آن گاز جمع شده در اطراف آند آن، همان گاز کلر است.

پ) در آن، تیغهٔ سدیمی نقش کاتد را دارد.

ت) در یک سلول الکترولیتی صورت می‌گیرد که قطب مثبت باتری به آند آن وصل است.

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

۴۷- در فرآیند خوردگی کدام گزینه رخ نمی‌دهد؟

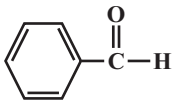
۱) در بخشی از فرایند که آهن به عنوان آند عمل می‌کند و زیر قطرهٔ آب است، ابتدا عدد اکسایش آهن دو واحد افزایش می‌یابد.

۲) در بخشی از فرایند که به عنوان کاتد عمل می‌کند و در مجاورت O_2 قرار دارد، نیم واکنش $2H_2O + O_2 + 4e^- \rightarrow 4OH^-$ رخ می‌دهد.

۳) فرآوردهٔ نهایی دو نیم‌واکنش اکسایش آهن و کاهش اکسیژن، آهن (II) اکسید یا همان زنگ آهن است.

۴) حضور اسید در محیط، سرعت این فرایند را افزایش می‌دهد.

۴۸- در کدام گزینه، عدد اکسایش همهٔ اتم‌های کربن، برابر هستند؟

۱) اتانول ۲) 

۳) اتان ۴) استیک‌اسید

۴۹- در کدام گزینه، نام ظرفی مناسب برای نگهداری مادهٔ مذکور آمده است؟

۱) ظرف آلومینیومی ← هیدروکلریک اسید

۲) آهن سفید ← محلول مس (II) سولفات

۳) قوطی حلبی ← شیر منیزی

۴) ظرف آهنی که درون آن با نقره آبکاری شده است ← محلول پلاتین (II) سولفات

۵۰- در تولید منیزیم از آب دریا، کدام گزینه در مورد مراحل صورت گرفته در این روش نادرست است؟

۱) عبور $Mg(OH)_2$ از صافی ← تولید $MgCl_2$

۲) ذوب $Mg(OH)_2$ ← برقکافت آن

۳) برقکافت $MgCl_2$ ← ورود به سلول الکتروشیمی

۴) خشک کردن $MgCl_2$ ← ذوب $MgCl_2$

دفترچهٔ پاسخ

پاسخ‌نامه دروس اختصاصی

آزمون غیرحضوری

اختصاصی ریاضی

(۱۶ آذر ۱۳۹۷)

(مباحث ۳۰ آذر ۹۷)

گروه فنی و تولید:

مسئول تولید آزمون غیرحضوری	محمد اکبری
مسئول دفترچه آزمون غیرحضوری	نرگس غنی‌زاده
گروه مستندسازی	**مدیر گروه:** مریم صالحی **مسئول دفترچه:** آتنه اسفندیاری
حروف‌نگار	حسن خرّم‌جو
ناظر چاپ	سوران نعیمی

گروه آزمون

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی (وقف عام)

• **دفتر مرکزی :** خیابان انقلاب – بین صبا و فلسطین – پلاک ۹۲۳ **تلفن:** ۶۴۶۳-۰۲۱

حسابان ۲

۱- گزینهٔ «۱» *(سیدعادل حسینی)*

$$y=\begin{cases}4 & ; \quad x\in\mathbb{Q}\\ \sin(\pi x)\cos(\pi x) & ; \quad x\notin\mathbb{Q}\end{cases}=\begin{cases}4 & ; \quad x\in\mathbb{Q}\\ \frac{1}{2}\sin(2\pi x) & ; \quad x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

دورهٔ تناوب ضابطهٔ بالایی، هر عدد گویایی $(T_1\in\mathbb{Q})$ می‌تواند باشد و دورهٔ تناوب ضابطهٔ پائین را نیز می‌توان $T_2=\frac{2\pi}{2\pi}=1$ در نظر گرفت. چون $T_2\in\mathbb{Q}$ است، دورهٔ تناوب تابع همان $T_2=1$ است.

۲- گزینهٔ «۱» *(علی‌اصغر فرضی)*

$$\cos\frac{5\pi}{3}=\cos(2\pi-\frac{\pi}{3})=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

$$\sin(\frac{2\pi}{3}+x)=\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}+x)=\cos(\frac{\pi}{6}+x)$$

$$=\cos\frac{\pi}{6}\cos x-\sin\frac{\pi}{6}\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=0$$

$$\Rightarrow\sin x=1\Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\quad ;\quad k\in\mathbb{Z}$$

۳- گزینهٔ «۴» *(سراسری ریاضی - ۸۶)*

$$\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}=\sqrt{3}\Rightarrow\frac{2\sin^2 x}{2\sin x\cos x}=\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow\tan x=\sqrt{3}=\tan\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{3}\quad ;\quad k\in\mathbb{Z}$$

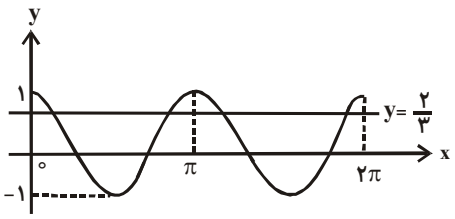
(چون جواب‌های به دست‌آمده، ریشهٔ مخرج نیستند، قابل قبول هستند.)

۴- گزینهٔ «۴» *(محمدرضا شوکتی‌بیرق)*

$$\sin(\frac{\pi}{4}+x)\sin(\frac{\pi}{4}-x)=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow-\frac{1}{2}[\cos(\frac{\pi}{4}+x+\frac{\pi}{4}-x)-\cos(\frac{\pi}{4}+x-\frac{\pi}{4}+x)]$$

$$=-\frac{1}{2}[0-\cos 2x]=\frac{1}{2}\cos 2x=\frac{1}{3}\Rightarrow\cos 2x=\frac{2}{3}$$



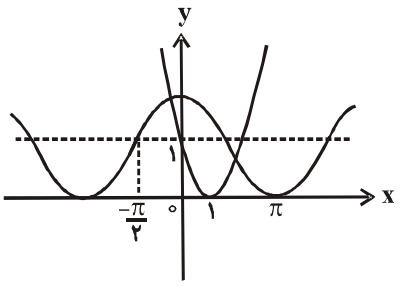
با توجه به نمودارهای $y=\frac{2}{3}$ و $y=\cos 2x$ ملاحظه می‌کنیم که معادلهٔ داده‌شده، چهار ریشه در بازهٔ $[0,2\pi]$ دارد.

۵- گزینهٔ «۲» *(مهرداد ملوندی)*

$$x^2-\cos x=2x\Rightarrow x^2-2x=\cos x$$

$$\Rightarrow(x-1)^2-1=\cos x\Rightarrow(x-1)^2=1+\cos x$$

با رسم نمودارهای دو تابع با معادله‌های $y_1=1+\cos x$ ، $y_2=(x-1)^2$ در یک دستگاه مختصات داریم:



بنابراین معادله، یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ منفی دارد.

۶- **گزینهٔ «۴»** *(شراره شهسواریان)*

تابع $y=\tan(u)$ در نقاط $u=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbb{Z})$، مجانب قائم دارد.

$$\pi\sin x=k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow \sin x=k+\frac{1}{2}$$

با توجه به این که $0<x<\frac{\pi}{2}$ است. بنابراین:

$$k=0\Rightarrow \sin x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{\pi}{6}$$

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{6})^+} f(x)=\lim_{x\to(\frac{\pi}{6})^+}\tan(\pi\sin x)=\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+}\tan x=-\infty$$

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{6})^-} f(x)=\lim_{x\to(\frac{\pi}{6})^-}\tan(\pi\sin x)=\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\tan x=+\infty$$

بنابراین نمودار در اطراف مجانب‌اش به صورت زیر است.

۷- **گزینهٔ «۲»** *(حمید ستاری)*

برای یافتن معادلهٔ مجانب‌های قائم، ریشه‌های مخرج کسر را می‌یابیم:

$$\cos x-1=0\Rightarrow \cos x=1\Rightarrow x=2k\pi,(k\in\mathbb{Z})$$

از طرفی، همواره:

$$\cos x\le 1\Rightarrow \cos x-1\le 0$$

حال اگر یکی از مجانب‌های قائم، مثلاً $x=0$ را در نظر بگیریم، داریم:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+} y=\frac{0+1}{0^-}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^-} y=\frac{0+1}{0^-}=-\infty\end{cases}$$

بنابراین در اطراف مجانب قائم هر دو شاخهٔ منحنی به سمت $(-\infty)$ میل می‌کنند و در نتیجه گزینهٔ «۲» صحیح است.

۸- **گزینهٔ «۱»** *(محمدطاهر شعاعی)*

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2(x-1)^2}{\sqrt{4x^2+4x+1}}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2(x-1)^2}{|2x+1|}+x\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2(x-1)^2}{-2x-1}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-4x+2-2x^2-x}{-2x-1}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-5x+2}{-2x-1}=\frac{5}{2}$$

۹- **گزینهٔ «۳»** *(غلامرضا علی)*

$$y=\frac{x-2}{(x+2)^2}$$

بنابراین در اطراف خط مجانب قائم $x=-2$، تابع به سمت $-\infty$ میل می‌کند.

بنابراین گزینه‌های (۳) یا (۴) می‌تواند درست باشد.

در ضمن داریم:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y=0$$

اما وقتی $x\to+\infty$، y مثبت و وقتی $x\to-\infty$، y منفی است. بنابراین گزینهٔ (۳)درست است.

۱۰- **گزینهٔ «۲»** *(فرهاد حامی)*

$$\lim_{x\to 0} f(x)=0^+$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1}{f}(x)=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0} f(x)}=+\infty$$

تنها نمودار گزینهٔ «۲» این ویژگی را دارد.

هندسه ۳

۱۱- گزینهٔ «۴» *(کاظم باقرزاده)*

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{ساروس}} (-3+0+6)-(1+12+0) = 3-13 = -10$$

$$|\frac{1}{2}A^3| = \frac{1}{8}|A|^3 = \frac{1}{8}(-10)^3 = -\frac{1000}{8} = -125$$

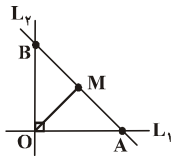
۱۲- گزینهٔ «۳» *(امیر محمدظاهری)*

$$||A|A+2A| = |A| \Rightarrow |A\underbrace{(|A|+2)}_{\text{عدد}}| = |A| \Rightarrow (|A|+2)^2|A| = |A|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |A| = 0 \Rightarrow |2A| = 4|A| = 0 \\ |A|+2 = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} |A| = -1 \\ |A| = -3 \end{cases} \Rightarrow |2A| = 2^2|A| = \begin{cases} -4 \\ -12 \end{cases} \end{cases}$$

دترمینان ماتریس $2A$، تنها یکی از مقادیر ۰، ۴- و ۱۲- می‌تواند باشد.

۱۳- گزینهٔ «۱» *(سیدعادل‌رضا مرتضوی)*



مطابق شکل، در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAB، میانهٔ وارد بر وتر، نصف طول وتر است، پس با فرض اینکه طول AB برابر k است، داریم:

$$OM = \frac{AB}{2} = \frac{k}{2}$$

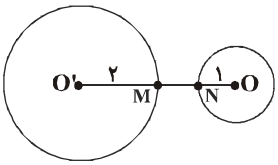
یعنی فاصلهٔ نقطهٔ متغیر M، از نقطهٔ ثابت O، برابر با مقدار ثابت $\frac{k}{2}$ است، لذا مکان هندسی نقطهٔ M، دایره‌ای به مرکز O و به شعاع $\frac{k}{2}$ است.

۱۴- گزینهٔ «۲» *(علیرضا شریف‌فطیبی)*

C مرکز دایرهٔ : $O = (2,-1)$ ، C شعاع دایرهٔ : $r = 1$

C' مرکز دایرهٔ : $O' = (-1,3)$ ، C' شعاع دایرهٔ : $r' = 2$

$$\Rightarrow OO' = \sqrt{(-1-2)^2+(3+1)^2} = 5 > r+r' \Rightarrow$$ دایره‌ها متخارج‌اند



پس کوتاه‌ترین فاصلهٔ بین نقاط این دو دایره، مطابق شکل، طول پاره‌خط MN است که به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$MN = OO' - (r+r') = 5-(1+2) = 2$$

۱۵- گزینهٔ «۲» *(سامان اسپهرم)*

$$x^2+y^2-mx-my+2m = 0 \Rightarrow (x-\frac{m}{2})^2+(y-\frac{m}{2})^2 = \frac{m^2-4m}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{مرکز دایره}: W = (\frac{m}{2},\frac{m}{2}) \\ \text{شعاع}: R = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{m^2-4m}) \end{cases}$$

برای آن‌که نقطهٔ $A = (1,m)$ خارج این دایره باشد باید $AW > R$ باشد، پس:

$$\sqrt{(\frac{m}{2}-1)^2+(\frac{m}{2}-m)^2} > \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{m^2-4m}$$

$$\Rightarrow (\frac{m-2}{2})^2+(-\frac{m}{2})^2 > \frac{m^2-4m}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2m^2-4m+4}{4} > \frac{m^2-4m}{2} \Rightarrow m > -1 \quad (1)$$

از طرفی برای شعاع دایره داریم:

$$R = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{m^2-4m} \Rightarrow m^2-4m > 0 \Rightarrow \begin{cases} m < 0 \\ \text{یا} \\ m > 4 \end{cases} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} (-1 < m < 0) \cup (m > 4)$$

۱۶- **گزینهٔ «۲»** *(هادی کنی)*

$$C_1:(x-2)^2+(y-m)^2=16 \Rightarrow O_1=(2,m), R_1=4$$

$$C_2: x^2+y^2+6x=0 \Rightarrow (x+3)^2+y^2=9$$

$$\Rightarrow O_2=(-3,0), R_2=3$$

$$O_1O_2=\sqrt{5^2+m^2}=\sqrt{25+m^2}>R_1,R_2$$

بنابراین دو دایره تنها می‌توانند مماس خارج باشند. پس:

$$O_1O_2=R_1+R_2 \Rightarrow \sqrt{25+m^2}=4+3 \Rightarrow m^2+25=49$$

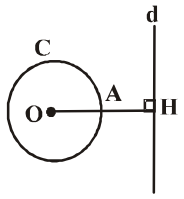
$$\Rightarrow m^2=24 \Rightarrow m=\pm 2\sqrt{6}$$

۱۷- **گزینهٔ «۲»** *(محمدابراهیم گیتی‌زاده)*

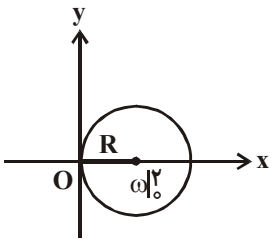
$$C:(x-1)^2+(y+1)^2=1 \ , \ O=(1,-1) \ , \ R=1$$

مطابق شکل، فاصلهٔ مرکز دایره از خط d برابر است با:

$$OH=\frac{|3\times 1-4(-1)+8|}{\sqrt{9+16}}=3 \Rightarrow \min(AH)=OH-R=2$$



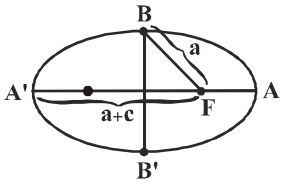
۱۸- **گزینهٔ «۴»** *(حسین حاجیلو)*



چون این دایره خط $x=1$ را قطع می‌کند، پس در سمت راست محور yها قرار دارد. مطابق شکل، مختصات مرکز دایره‌ای به شعاع $R=2$ که در مبدأ مختصات بر محور yها مماس است، به صورت $\omega(2,0)$ است، پس معادلهٔ این دایره به صورت $(x-2)^2+y^2=4$ است، از تقاطع این دایره با خط $x=1$، داریم:

$$\begin{cases}(x-2)^2+y^2=4\\ x=1\end{cases} \Rightarrow (1-2)^2+y^2=4 \Rightarrow y=\pm\sqrt{3}$$

۱۹- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین ابومحبوب)*



$$\left.\begin{array}{l}\text{فاصلهٔ کانون تا دورترین رأس}=a+c=8\\ \text{فاصلهٔ کانون تا رأس ناکانونی}=a=5\end{array}\right\} \Rightarrow c=3$$

$$\Rightarrow \text{خروج از مرکز}: e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}=0/6$$

توجه کنید که دو سر قطر کوچک بیضی را رئوس ناکانونی می‌نامیم.

۲۰- **گزینهٔ «۱»** *(مهرداد ملوندی)*

نکته: اگر BB' قطر کوچک بیضی باشد آنگاه دایرهٔ به قطر BB'، بزرگ‌ترین دایرهٔ محاط درون آن بیضی است. پس مرکز این دایره، همان مرکز بیضی و شعاع دایره، برابر مقدار b برای بیضی است. داریم:

$$x^2+y^2-2x+6y=6 \Rightarrow (x-1)^2+(y+3)^2=16$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\text{مرکز بیضی}: W=(1,-3)\\ \text{شعاع دایره}: R=4 \Rightarrow b=4\end{cases}$$

از طرفی $F=(3,1)$ یکی از کانون‌های بیضی است، پس:

$$\begin{cases}c=|FW|=\sqrt{(1-3)^2+(-3-1)^2}=2\sqrt{5}\\ a=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{16+20}=6\end{cases}$$

$$\text{خروج از مرکز}: e=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{5}}{6}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

<u>ریاضیات گسسته</u>

۲۱- گزینهٔ «۳» *(نوید مجیدی)*

$$a+43\overset{29}{\equiv}21$$

$$\Rightarrow a\overset{29}{\equiv}21-43\Rightarrow a\overset{29}{\equiv}-22\overset{29}{\equiv}7\Rightarrow a=29k+7\qquad (k\in\mathbb{Z})$$

کم‌ترین مقدار سه رقمی a به ازای $k=4$ به دست می‌آید و در این صورت خواهیم داشت:

$$a_{min}=116+7=123$$

$$\Rightarrow \text{مجموع ارقام}=1+2+3=6$$

۲۲- گزینهٔ «۲» *(علیرضا سیف)*

$$a^2\overset{7}{\equiv}a+2\Rightarrow a^2-a-2\overset{7}{\equiv}0\Rightarrow (a-2)(a+1)\overset{7}{\equiv}0$$

$$(a-2)(a+1)=7q\Rightarrow\begin{cases}a-2=7q'\Rightarrow a=7q'+2\\ a+1=7q'\Rightarrow a=7q'-1=7q''+6\end{cases}$$

پس برای آن که رابطه برقرار باشد، باید باقی‌ماندهٔ a بر ۷، ۲ یا ۶ باشد.

$$a=7q+2\Rightarrow q=2,3,\cdots,13\Rightarrow \text{۱۲ عدد}$$

$$a=7q+6\Rightarrow q=1,2,\cdots,13\Rightarrow \text{۱۳ عدد}$$

مجموعاً ۲۵ عدد طبیعی دو رقمی برای a داریم.

۲۳- گزینهٔ «۱» *(امیرحسین ابومحبوب)*

اگر تعداد وزنه‌های ۳ کیلویی را با x و تعداد وزنه‌های ۵ کیلویی را با y نشان دهیم، آنگاه داریم:

$$3x+5y=34\Rightarrow 5y\overset{3}{\equiv}34\Rightarrow -y\overset{3}{\equiv}1\Rightarrow y\overset{3}{\equiv}-1\overset{3}{\equiv}2\Rightarrow y=3k+2$$

$$3x+5(3k+2)=34\Rightarrow 3x=-15k+24\Rightarrow x=-5k+8$$

با توجه به این که تعداد وزنه‌ها عددی صحیح و نامنفی است، داریم:

$$\left.\begin{array}{l}x\ge 0\Rightarrow -5k+8\ge 0\Rightarrow k\le\frac{8}{5}\\ y\ge 0\Rightarrow 3k+2\ge 0\Rightarrow k\ge-\frac{2}{3}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{عدد صحیح } k} k=0,1$$

بنابراین به دو طریق می‌توان یک کیسهٔ ۳۴ کیلویی را با وزنه‌های ۳ و ۵ کیلویی وزن کرد.

۲۴- گزینهٔ «۳» *(محمدعلی نادرپور)*

$$\text{شرط جواب}: (39,91)\,|\,2^n-1\Rightarrow 13\,|\,2^n-1$$

$$2^6=64\overset{13}{\equiv}-1\xrightarrow{\text{به توان ۲}}2^{12}\overset{13}{\equiv}1$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، به ازای $n=12$، رابطهٔ $13\,|\,2^n-1$ برقرار است، پس ۱۲ کوچک‌ترین عدد دو رقمی است که دارای ویژگی مورد نظر می‌باشد.

$$\text{مجموع ارقام}: 1+2=3$$

۲۵- گزینهٔ «۲» *(سیدمحسن فاطمی)*

$$\text{مرتبهٔ } p \text{ (منتظم } -r\text{) در گراف}: q=\frac{rp}{2}$$

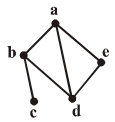
$$K_p \text{ در گراف کامل}: q=\binom{p}{2}=\frac{p(p-1)}{2}$$

$$\frac{p(p-1)}{2}-\frac{rp}{2}=12\Rightarrow\frac{p(p-1)}{2}-\frac{4p}{2}=12$$

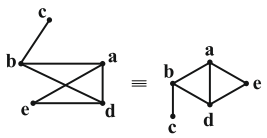
$$\Rightarrow p(p-1)-4p=24\Rightarrow p(p-5)=24=8\times 3\Rightarrow p=8$$

۲۶- گزینهٔ «۲» *(مهرداد ملوندی)*

نمودار گراف $G=(V,E)$ با مجموعهٔ V و E مورد نظر به صورت زیر است:



مطابق شکل زیر، با تغییر مکان رأس e، از روی یک گراف، گراف دیگر حاصل می‌شود.



۲۷- گزینهٔ «۳» *(هومن نورائی)*

در هر گراف ساده از مرتبهٔ p داریم:

$$\delta \le \frac{2q}{p} \Rightarrow 4 \le \frac{38}{p} \Rightarrow p \le \frac{38}{4} \Rightarrow p \le 9 \Rightarrow p_{max} = 9$$

۲۸- گزینهٔ «۳» *(حمیدرضا امیری)*

اگر مرتبهٔ گراف را p در نظر بگیریم آنگاه با توجه به فرض داریم:

$$\sum_{i=1}^{p} \deg v_i = 2q \Rightarrow 4\times 2 + (p-4)\times 3 = 2\times 13$$
$$\Rightarrow 8 + 3p - 12 = 26 \Rightarrow 3p = 30 \Rightarrow p = 10$$

$$\text{میانگین درجات رئوس} = \frac{2q}{p} = \frac{2\times 13}{10} = 2/6$$

۲۹- گزینهٔ «۴» *(رحمت عین‌علیان)*

برای یک مسیر به طول ۴ به ۵ رأس نیاز داریم، که باید از رأس a شروع شوند.

تعداد این مسیرها برابر است با:

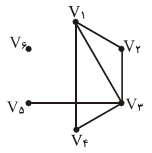
$$\underset{\substack{\uparrow \\ a}}{1} \times \underline{6} \times \underline{5} \times \underline{4} \times \underline{3} = 360$$

۳۰- گزینهٔ «۴» *(علی عابدینی)*

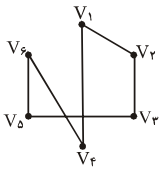
گراف $G=(V,E)$ از مرتبهٔ ۶ و با مجموعهٔ یال‌های

$$\{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_3, v_3v_4, v_3v_5\}$$

به صورت زیر است:



در صورتی که یال‌های v_6v_5 و v_6v_4 اضافه شوند و یال‌های v_1v_3 و v_3v_4 حذف شوند، یک گراف ۲- منتظم حاصل می‌شود:



فیزیک

۳۱- گزینهٔ «۳» *(حمید زرین‌کفش)*

$$F_N - mg = ma$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = +2\frac{m}{s^2} \Rightarrow (F_N)_1 - 500 = 50\times 2 \Rightarrow (F_N)_1 = 600N \\ a_2 = -2\frac{m}{s^2} \Rightarrow (F_N)_2 - 500 = 50\times(-2) \Rightarrow (F_N)_2 = 400N \end{cases}$$

$$(F_N)_1 - (F_N)_2 = 600 - 400 = 200N$$

۳۲- گزینهٔ «۴» *(خسرو ارغوانی‌فرد)*

با استفاده از قانون دوم نیوتون، داریم:

$$F_{av} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = m\frac{|\vec{v} - \vec{v}_0|}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow F_{av} = 1/5 \times \frac{|0-10|}{0/005} = 3000N$$

۳۳- گزینهٔ «۱» *(بابک اسلامی)*

عقربهٔ ساعت‌شمار در هر ۱۲ ساعت یک دور کامل می‌زند، بنابراین داریم:

$$T_1 = \frac{2\pi r_1}{v_1} \Rightarrow 12\times 60\times 60 = \frac{2\times 3\times 8\times 10^{-2}}{v_1}$$

$$\Rightarrow v_1 = \frac{6\times 8\times 10^{-2}}{12\times 3600}\frac{m}{s}$$

عقربهٔ دقیقه‌شمار در هر ۶۰ دقیقه یک دور کامل می‌زند، بنابراین داریم:

$$T_2 = \frac{2\pi r_2}{v_2} \Rightarrow 60\times 60 = \frac{2\times 3\times 12\times 10^{-2}}{v_2}$$

$$\Rightarrow v_2 = \frac{6\times 12\times 10^{-2}}{3600}\frac{m}{s}$$

بنابراین، می‌توان نوشت:

$$\Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{\frac{6\times 8\times 10^{-2}}{12\times 3600}}{\frac{6\times 12\times 10^{-2}}{3600}} = \frac{8}{12\times 12} = \frac{1}{18}$$

۳۴- گزینهٔ «۲» *(بابک اسلامی)*

ابتدا با استفاده از رابطهٔ اندازهٔ شتاب مرکزگرا، دورهٔ حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2} \Rightarrow 24300 = \frac{4\pi^2\times 3}{T^2}$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{90}s = \frac{1}{15}s$$

با توجه به این‌که زمان یک دور چرخش برابر با T ثانیه است، داریم:

$$rpm = \left(\frac{1\text{دور}}{T(s)}\right)\left(\frac{60s}{1min}\right) = \left(\frac{1\text{دور}}{\frac{1}{15}s}\right)\left(\frac{60s}{1min}\right) = 900\frac{\text{دور}}{\text{دقیقه}}$$

۳۵- گزینهٔ «۲» *(بابک اسلامی)*

نیروی مرکزگرای لازم برای حرکت دایره‌ای یکنواخت ماهواره به دور زمین توسط نیروی گرانش وارد بر ماهواره تأمین می‌شود؛ بنابراین داریم:

$$m\frac{v^2}{r} = G\frac{mM_e}{r^2} \Rightarrow v^2 = \frac{GM_e}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_e}{r}}$$

$$\Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} \xrightarrow[r_2 = R_e + 2R_e = 3R_e]{r_1 = R_e + R_e = 2R_e} \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{2R_e}{3R_e}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

۳۶- گزینهٔ «۲» *(فرهنگ فرقانی‌فرد)*

با استفاده از رابطهٔ انرژی مکانیکی یک نوسانگر ساده، می‌توان نوشت:

$$E=\frac{1}{2}m\omega^2A^2 \xrightarrow{m_1=m_2} \frac{E_1}{E_2}=(\frac{\omega_1}{\omega_2})^2\times(\frac{A_1}{A_2})^2$$

$$\Rightarrow \frac{E_1}{E_2}=(\frac{20\pi}{40\pi})^2\times(\frac{4}{2})^2=1$$

۳۷- گزینهٔ «۲» *(ابراهیم قلی‌دوست)*

ابتدا بسامد زاویه‌ای نوسانگر را حساب می‌کنیم:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{50}}\Rightarrow \omega=100\frac{rad}{s}$$

با توجه به این‌که بیشینهٔ انرژی پتانسیل کشسانی برابر با انرژی مکانیکی است، جرم نوسانگر را به‌دست می‌آوریم:

$$E=U_{max}=\frac{1}{2}m\omega^2A^2\Rightarrow 1=\frac{1}{2}m\times(100)^2\times(0/1)^2$$

$$\Rightarrow m=\frac{2}{100}kg=20g$$

۳۸- گزینهٔ «۱» *(غلامرضا ممبی)*

دورهٔ تناوب حرکت نوسانی سادهٔ یک آونگ ساده از رابطهٔ $T_1=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ و دورهٔ تناوب سامانهٔ جرم- فنر از رابطهٔ $T_2=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ به‌دست می‌آید. با توجه به برابر بودن دورهٔ آن‌ها داریم:

$$T_1=T_2\Rightarrow 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\Rightarrow \frac{L}{g}=\frac{m}{k}$$

$$\Rightarrow mg=kL\Rightarrow W=kL$$

۳۹- گزینهٔ «۴» *(روبن هوانسیان)*

چون راستای ارتعاش ذرات بر راستای انتشار موج منطبق است، بنابراین موج طولی است. هم‌چنین سرعت انتشار موج در یک محیط تنها به ویژگی‌های فیزیکی محیط بستگی دارد و از شرایط چشمهٔ موج مستقل است، بنابراین با تغییر بسامد چشمهٔ موج، سرعت انتشار موج در محیط (فنر) ثابت می‌ماند.

۴۰- گزینهٔ «۴» *(محسن پیکان)*

$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}=\sqrt{\frac{FL}{m}}\xrightarrow[V=\frac{\pi d^2}{4}L]{m=\rho V} v=\frac{2}{d}\sqrt{\frac{F}{\pi\rho}}$$

$$\Rightarrow v=\frac{2}{0/5\times10^{-3}}\times\sqrt{\frac{234}{3\times7/8\times10^3}}\Rightarrow v=400\frac{m}{s}$$

شیمی

۴۱- گزینهٔ «۳» *(شهرزاد حسین‌زاده)*

رایج‌ترین نوع سلول سوختی، سلول سوختی هیدروژن –اکسیژن است که نوعی سلول گالوانی است. در این سلول واکنش $H_2 + O_2 \rightarrow H_2O$ رخ می‌دهد که طی آن عدد اکسایش اتم‌های سوخت سلول (هیدروژن) ۱ واحد افزایش می‌یابد. بازدهٔ این واکنش در سلول سوختی ۶۰ درصد است. (۳ برابر بازده آن در موتور درون‌سوز که ۲۰ درصد است). بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: سوخت همان هیدورژن است که طی واکنش برقکافت آب در سلول الکترولیتی تهیه می‌شود و ابتدا الکترون از دست می‌دهد، سپس پروتون آن از غشا عبور می‌کند.

گزینهٔ «۲»: مادهٔ اکسنده اکسیژن و سوخت هیدروژن است؛ اکسیژن در کاتالیزگری کاتدی با پروتون و الکترون واکنش می‌دهد و بخار آب تولید می‌کند.

گزینهٔ «۴»: همهٔ مواد به حالت گازی هستند.

۴۲- گزینهٔ «۳» *(شهرزاد حسین‌زاده)*

گزینهٔ «۱»: این واکنش انجام پذیر است چون آلومینیم که اکسید شده کاهندهٔ قوی‌تری است (با توجه به سری الکتروشیمیایی) و در این واکنش گونهٔ کاهنده (Al) از عدد اکسایش صفر در حالت آزاد به ۳ در یون Al^{3+} رسیده است.

بررسی میانه گزینه‌ها.

گزینهٔ «۲»: واکنش انجام‌پذیر نیست. Mg در سری الکتروشیمیای از Au پایین‌تر و کاهنده‌تر است.

گزینهٔ «۳»: در فرایند هال $(2Al_2O_3 + 3C \rightarrow 4Al + 3CO_2)$ کاهنده کربن است که از عدد اکسایش صفر در حالت آزاد به ۴+ در ساختار CO_2 رسیده است.

گزینهٔ «۴»: در فرایند هابر $(N_2 + 3H_2 \rightarrow 2NH_3)$ گونهٔ کاهنده هیدروژن است که از عدد اکسایش صفر در حالت عنصری به ۱+ در ساختار NH_3 رسیده است.

۴۳- گزینهٔ «۲» *(شهرزاد حسین‌زاده)*

فقط درصورتی آهنی سفید یا گالوانیزه نام دارد که فلز مورد استفاده به عنوان کاتد، روی (Zn) باشد. بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: همگی در سری الکتروشیمیایی از آهن پایین‌تر و کاهنده‌تر هستند.

گزینهٔ «۳»: چون در هر حال فلز کاهنده‌تر، در رقابت کاتدی برای اکسیدشدن پیروز می‌شود. اما در حالتی که از قلع استفاده می‌شود، آهن از آن کاهنده‌تر است.

گزینهٔ «۴»: چون ممکن است طی اکسایش یون‌ها وارد مواد غذایی شوند.

۴۴- گزینهٔ «۱» *(شهرزاد حسین‌زاده)*

در سلول الکترولیتی آبکاری انجام می‌شود و جهت حرکت الکترون در آن از آند به کاتد است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه‌های «۲» و «۴»: سلول مورد نظر الکترولیتی (ونه گالوانی یا سوختی) است.

گزینهٔ «۳»: در این نوع آبکاری، قاشق به قطب منفی باتری وصل می‌شود و کاتد است.

۴۵- گزینهٔ «۲» *(شهرزاد حسین‌زاده)*

موارد اول و آخر از تفاوت‌ها هستند.

مورد اول: آند در سلول الکترولیتی قطب مثبت است در سلول گالوانی قطب منفی است.

مورد دوم: همواره جهت حرکت الکترون از آند به کاتد است.

مورد سوم: همواره در سطح آند اکسایش و سطح کاتد کاهش رخ می‌دهد.

مورد چهارم: در سلول الکترولیتی بر خلاف گالوانی دیوارهٔ متحلخل نداریم.

۴۶- گزینهٔ «۳» *(شهرزاد حسین‌زاده)*

موارد الف، ب و ت درست است؛ بررسی سایر موارد:

الف) $NaCl$ مذاب در این واکنش شرکت می‌کند که با افزودن کلسیم‌کلرید به آن، نقطه ذوبش از $۸۰۱^\circ C$ به $۵۸۷^\circ C$ می‌رسد.

ب) این واکنش در صنعت در سلول دانز رخ می‌دهد.

پ) سدیم به صورت تیغه در این واکنش شرکت نمی‌کند؛ هدف تولید سدیم است نه مصرف آن!

ت) در سلول الکترولیتی قطب مثبت باتری به آند متصل است.

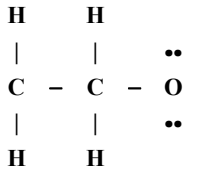
۴۷- گزینهٔ «۳» *(شهرزاد حسین‌زاده)*

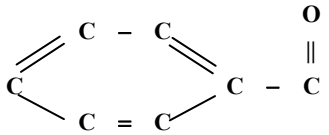
همهٔ موارد مذکور درستند جز اینکه زنگ آهن، آهن (III) اکسید است، نه آهن (II) اکسید.

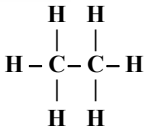
$$۴Fe + ۳O_۲ + ۶H_۲O \rightarrow ۴Fe(OH)_۳$$

۴۸- گزینهٔ «۳» *(شهرزاد حسین‌زاده)*

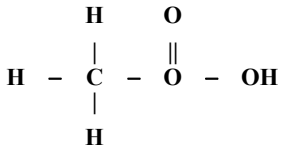
ساختار الکترون نقطه‌ای هر گزینه را رسم می‌کنیم:

گزینهٔ «۱»:  : عدد اکسایش دو کربن، به علت تفاوت تعداد الکترون‌های نسبت داده شده متفاوت است.

گزینهٔ «۲»:  عدد اکسایش کربن خارج از حلقه با بقیه اتم‌های کربن، به علت تفاوت الکترون نسبت داده شده متفاوت است.

گزینهٔ «۳»: 

هر دو اتم کربن دارای عدد اکسایش -۳ هستند.

گزینه «۴»: 

عدد اکسایش دو کربن، به علت تفاوت تعداد الکترون‌های نسبت داده شده متفاوت است.

۴۹- گزینهٔ «۳» *(شهرزاد حسین‌زاده)*

در صورتی می‌توان یک ماده را در ظرف نگهداری کرد که با دیواره ظرف واکنش ندهد. یعنی کاتیون محلول، نسبت به فلز دیواره، کاهنده قوی‌تر باشد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: $E^\circ_{Al} < E^\circ_{H}$

گزینهٔ «۲»: $E^\circ_{Zn} < E^\circ_{Cu}$

گزینهٔ «۳»: $E^\circ_{Mg} < E^\circ_{Sn}$ (شیر منیزی حاوی Mg است و قوطی حلبی آهن پوشیده شده با قلع است.)

گزینهٔ «۴»: $E^\circ_{Ag} < E^\circ_{Pt}$

۵۰- گزینهٔ «۳» *(شهرزاد حسین‌زاده)*

گزینهٔ «۲»: این مرحله کلاً رخ نمی‌دهد و غلط است. $MgCl_۲$ را ذوب می‌کنند نه $Mg(OH)_۲$